

INTERPOLAREA ȘI APLICAȚIILE EI

Ion PĂVALOIU Nicolae POP

Cuprins

Introducere	11
1 Interpolare în \mathbb{R} și \mathbb{C}	13
1.1 Introducere	13
1.2 Problema interpolării	14
1.3 Determinarea funcțiilor de interpolare	15
1.4 Polinomul de interpolare al lui Lagrange	25
1.5 Diferențe divizate cu noduri simple	32
1.6 Polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton	36
1.7 Alte forme pentru polinomul lui Lagrange	38
1.8 Interpolare cu noduri multiple; polinomul lui Hermite	40
1.9 Diferențe divizate pe noduri multiple	50
1.10 Polinomul lui Hermite sub forma lui Newton	54
1.11 Forma integrală a diferențelor divizate	55
1.12 Interpolarea funcțiilor de variabilă complexă	61
2 Derivate de ordin superior ale funcțiilor inverse și funcțiilor compuse	63
2.1 Derivatele funcțiilor compuse	63
2.2 Cazuri particulare	67
2.3 Derivatele funcției inverse	72
2.4 Cazuri particulare	76
3 Derivarea și integrarea numerică	79
3.1 Problema derivării numerice	79
3.2 Formula de derivare numerică în cazul interpolării Lagrange	81
3.3 Integrarea numerică a funcțiilor	83
3.4 Formule de cuadratură de tip interpolator	84
3.5 Formulele de cuadratură Newton-Côtes	86

3.5.1	Cazuri particulare ale formulelor de cuadratură Newton-Côtes	87
3.6	Evaluarea erorii în formulele de cuadratură	89
3.7	Formule Newton-Côtes compozite	92
3.7.1	Formula dreptunghiului compozită	93
3.7.2	Formula trapezului compozită	94
3.7.3	Formula lui Simpson compozită	95
3.8	Formulele de cuadratură de tip Gauss	96
3.8.1	Polinoame ortogonale	97
3.8.2	Alegerea optimală a punctelor x_k și a ponderilor w_k .	100
3.9	Formule de cubatură	103
3.9.1	Formulele de cubatură de tip produs	103
3.10	Aplicații ale integrării numerice în metode de element finit .	107
4	Interpolarea inversă și metode de iteratie	111
4.1	Polinomul de interpolare inversă al lui Lagrange	112
4.2	Polinomul de interpolare inversă al lui Taylor	117
4.3	Polinomul de interpolare inversă al lui Hermite	120
4.4	Metode iterative de tip interpolator	121
4.5	Metode iterative de tip Cebâșev	126
4.6	Metode iterative de tip Aitken-Steffensen	131
4.7	Metode iterative obținute prin interpolare inversă cu ajutorul funcțiilor raționale de funcții liniare	137
4.8	Metode iterative obținute cu ajutorul polinomului de interpo- lare inversă de tip Hermite	141
5	Convergența metodelor de iteratie	143
5.1	Ordin de convergență și indice de eficiență	143
5.2	Convergența metodei iterative cu un singur pas	156
5.3	Convergența metodei iteratiei simple cu mai mulți pași . . .	168
5.4	Criterii generale de convergență a sirurilor de aproximare a rădăcinilor ecuațiilor	172
5.5	Convergența metodei lui Newton	180
5.6	Convergența metodelor de tip interpolator	190
5.7	Convergența monotonă a metodelor de tip Aitken-Steffensen	201
5.8	Convergența metodelor de tip Heron-Halley	212

6 Algoritmi optimali de tip interpolator	217
6.1 Ordin de convergență optimal	217
6.2 Indice de eficiență optimă	223
6.3 Metodă optimă de tip Hermite cu 2 pași	229
7 Aproximarea rădăcinilor ecuațiilor algebrice	235
7.1 Marginile rădăcinilor ecuațiilor algebrice	235
7.2 Calculul valorilor unui polinom și a derivatelor sale	242
7.3 Separarea rădăcinilor ecuațiilor	246
7.4 Aplicații ale metodelor de tip Cebâșev la rezolvarea ecuațiilor algebrice	250
7.5 Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu ajutorul seriilor	260
8 Metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I cu valori inițiale	267
8.1 Enunțul problemei	267
8.2 Metode de aproximare cu un singur pas	269
8.3 Metoda lui Euler	271
8.4 Metode de aproximare cu un pas având ordinul de consistență $p = 2$	272
8.4.1 Metoda Euler modificată	274
8.4.2 Metoda lui Heun	274
8.5 Metode cu un pas având cu ordinul de consistență $p = 4$	274
8.6 Metode de aproximare multipas a soluțiilor problemelor cu valori inițiale	275
8.7 Ordin de convergență, ordin de consistență și stabilitate	276
8.8 Convergența metodei multipas	277
8.9 Ordinul de consistență în cazul metodelor multipas liniare	279
8.10 Metode multipas liniare particulare	281
9 Metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale cu condiții la limită	291
9.0 Enunțul problemei	291
9.1 Metoda tirului (de tragere)	292
9.1.1 Metoda tirului (de tragere) aproximată cu metoda lui Newton	293
9.1.2 Metoda tirului (de tragere) aproximată cu o metodă de iterare clasică	295
9.2 Metoda diferențelor finite pentru rezolvarea problemelor cu condiții la limită	295

9.3 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale	297
9.3.1 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic	299
9.3.2 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic	302
9.3.3 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic	306

Contents

1 Interpolation in \mathbb{R} and \mathbb{C}

1.1	Introduction
1.2	Interpolation problem
1.3	Constructing the interpolation functions
1.4	Lagrange interpolation polynomial
1.5	Divided differences on simple nodes
1.6	Lagrange polynomial in the Newton form
1.7	Other forms for Lagrange polynomial
1.8	Interpolating on multiple nodes; Hermite polynomial
1.9	Divided differences on multiple nodes
1.10	Hermite polynomial in the Newton form
1.11	Divided differences in the integral form
1.12	Interpolation of the functions on complex variable

2 High order derivatives of the inverse functions and composed functions

2.1	Derivatives of composed functions
2.2	Applications
2.3	Derivatives of inverse functions
2.4	Applications

3 Numerical differentiation and integration

3.1	Numerical differentiation problem
3.2	Numerical differentiation problem for Lagrange interpolation
3.3	Numerical integration
3.4	Quadrature formulas of interpolator type
3.5	Newton-Cotes quadrature formulas
3.5.1	Applications of Newton-Cotes quadrature formulas
3.6	Error evaluation in quadrature formulas
3.7	Newton-Cotes composite formulas
3.7.1	Rectangle composite formulae
3.7.2	Trapezoid composite formulae
3.7.3	Simpson composite formulae
3.8	Gauss quadrature formulas
3.8.1	Orthogonal polynomial
3.8.2	Optimal choice of points x_k and weights w_k

3.9	Cubature formulas
3.9.1	Cubature formulas of product type.....
3.10	Applications of numerical integration in finite element method
4	Inverse interpolation and iterative methods
4.1	Lagrange inverse interpolation polynomial.....
4.2	Taylor inverse interpolation polynomial.....
4.3	Hermite inverse interpolation polynomial.....
4.4	Iterative methods of interpolatory type.....
4.5	Cebâşev-type iterative methods
4.6	Aitken-Steffenson-type iterative methods
4.7	Iterative methods obtained by inverse interpolation with rational functions of linear functions
4.8	Iterative methods obtained with Hermite inverse interpolation polynomial
5	Convergence of the iterative methods
5.1	Convergence order and efficiency index
5.2	Convergence of one-step iterative method
5.3	Convergence of the simple-iteration method with multiple steps
5.4	Convergence criteria for sequences of successive approximations to the roots of equations.....
5.5	Convergence of Newton's method
5.6	Convergence of interpolator-type methods.....
5.7	Monotone convergence of Aitken-Steffenson-type methods
5.8	Convergence of heron-Halley-type methods
6	Optimal algorithms interpolator type
6.1	Optimal convergence order
6.2	Optimal efficiency index.....
6.3	Optimal method Hermite-type with two-steps
7	Approximation of the roots for the algebraic equations
7.1	Bounds of the roots for the algebraic equations.....
7.2	Value of the polynomial and their derivative polynomial
7.3	Separation of the roots equations.....
7.4	Application of Cebâşev method to solving of the algebraic equations
7.5	Solving the algebraic equations with series

**8 Numerical integration methods for the initial
value problems of the first-order differential equations**

8.1	The problem
8.2	One-step approximation method
8.3	Euler's method.....
8.4	One-step approximation methods with consistency order $p = 2$
8.4.1	Modified Euler's method.....
8.4.2	Heun's method
8.5	One step method with consistency order $p = 4$
8.6	Multi step method for boundary value problems.....
8.7	Convergence order, consistency order and stability
8.8	Convergence of multi-step method.....
8.9	Consistency order for linear multi-step method
8.10	Applications of linear multi-step method.....

**9 Numerical integration methods for the boundary
value problems of the differential equations and
partial differential equations**

9.0	The problem
9.1	Shooting method..... 9.1.1 Shooting method approximated with Newton's method.... 9.1.2 Absorbtion method approximated with classical iterative method.....
9.2	Finite difference method for solving the boundary value problems
9.3	Finite difference method for numerical solving of the partial differential equations..... 9.3.1 Finite difference method for numerical solving of the elliptic partial differential equations..... 9.3.2 Finite difference method for numerical solving of the hyperbolic partial differential equations..... 9.3.3 Finite difference method for numerical solving of the parabolic partial differential equations

Introducere

În lucrarea de față ne propunem o tratare elementară a problemelor privind interpolarea funcțiilor de o singură variabilă și câteva aplicații ale interpolării în rezolvarea unor probleme de aproximare și calcul numeric.

Astfel, în primul capitol se introduce noțiunea de sistem interpolator și se determină forma generală a polinomului de interpolare cu noduri simple, folosind acest sistem. Se studiază restul în formula generală de interpolare. Tot aici este tratată problema interpolării prin polinoame, cu noduri simple respectiv noduri multiple. Se obțin astfel polinoamele lui Lagrange, respectiv Hermite, sub forma generală. Se studiază proprietatea acestor polinoame și se determină forma restului.

Diferențele divizate și proprietățile lor sunt studiate amănunțit și se dau reprezentări ale polinoamelor lui Lagrange și Hermite, precum și reprezentări ale restului cu ajutorul acestora.

În capitolul 2 se dă formule generale de calcul pentru derivatele funcțiilor compuse și pentru derivatele funcției inverse. Se examinează în principal cazurile particulare uzuale ale acestor formule.

Capitolul 3 este consacrat aplicațiilor interpolării privind calculul aproximativ al derivatelor și al integralelor. Câteva formule de derivare numerică și de cadratură care se obțin folosind diverse aproximări prin interpolare sunt studiate în mod amănunțit. Cazurile particulare uzuale ale acestor formule sunt puse în evidență împreună cu resturile respective.

În vederea aproximării soluțiilor ecuațiilor, un rol important îl joacă interpolarea inversă. Astfel în Capitolul 4 se tratează problema interpolării inverse și se arată că majoritatea metodelor de aproximare a soluțiilor ecuațiilor se pot genera cu ajutorul polinoamelor de interpolare inversă de tip Lagrange și Hermite.

Studiul convergenței metodelor de iterare ce au fost puse în evidență în capitolul anterior se face în Capitolul 5. Aici sunt introduse noțiuni de bază privind ordinul de convergență și indicele de eficiență al metodelor de iterare. Studiul convergenței metodelor în cauză este permanent dominat de cele 2 noțiuni amintite. Metodele de iterare ce aproximează rădăcinile

ecuațiilor simultan, atât prin lipsă cât și prin adaoș, prezintă avantajul că oferă un control al erorii la fiecare pas de iterare (aposteriori).

Din acest punct de vedere, un paragraf aparte este consacrat studiului convergenței metodelor de tip Aitken-Steffensen, despre care se arată că în condiții uzuale asupra funcțiilor ce intervin în ecuațiile date, conduc la șiruri ce aproximează bilateral rădăcinile acestora.

În capitolul 6 se examinează 2 probleme de optim privind ordinul de convergență, respectiv indicele de eficiență. Se dau algoritmi prin care, din diverse clase de metode se selectează acelea care au ordinul de convergență maxim, respectiv indicele de eficiență maxim.

Capitolul 7 este consacrat aplicațiilor metodelor de iterare la aproximarea rădăcinilor polinoamelor.

Ultimul capitol este consacrat studiului unor metode de aproximare a unor probleme la limite (pentru ecuații diferențiale și cu derivate parțiale).

Unele rezultate expuse în această lucrare sunt clasice și bine cunoscute, altele sunt relativ noi, ele au fost obținute și publicate în ultimul timp de către autorii acestui volum, precum și de alții autori cu preocupări similare.

În expunerea materialului am preferat să folosim, pe cât s-a putut, noțiunile pe care le-am considerat, cele mai elementare din Analiză Matematică și Analiză Numerică, pentru a face ca volumul să poată fi consultat de un număr cât mai mare de specialiști cu preocupări de Analiză Numerică și Teoria Aproximării.

Cartea poate fi folosită pentru informare și chiar pentru cercetare de către studenții și doctoranzii de la facultățile cu profil adecvat, precum și de matematicieni, ingineri, economisti etc.

Autorii

Capitolul 1

Interpolare în \mathbb{R} și \mathbb{C}

1.1 Introducere

În calculul practic, întâlnim frecvent probleme legate de calculul valorilor unor funcții $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; $E \subseteq \mathbb{R}$. Chiar dacă pe anumite puncte din mulțimea E , fie acestea x_1, x_2, \dots, x_{n+1} cunoaștem valorile $f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$ ale funcției f , este necesar să putem calcula valorile aproximative ale lui f și pe alte puncte ale mulțimii E . Pentru aceasta, un procedeu des întâlnit, pe lângă altele, este acela prin care se construiește o funcție $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, mai simplă, din punct de vedere al calculelor decât f , care pe punctele $f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$ să ia aceleași valori ca și funcția f . O astfel de funcție se numește funcție de interpolare. Problema construcției funcției φ se numește **problema interpolării**. În cele mai des întâlnite cazuri funcția φ se alege din mulțimea polinoamelor de un anumit grad, deoarece acestea oferă cel mai simplu algoritm de calcul. Evident pe lângă cerința ca funcția φ să fie o funcție simplă din punct de vedere al calculelor, se pune problema dacă această funcție odată construită, poate înlocui în calcule funcția f . Aceasta depinde în mare măsură de precizia cu care dorim să obținem valorile aproximative ale lui f , prin înlocuirea acesteia cu φ .

Este deci util să cunoaștem valoarea diferenței $R(f; x) = f(x) - \varphi(x)$ pe fiecare punct al mulțimii E sau dacă aceasta nu este posibil atunci să avem la dispoziție o inegalitate de forma $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, adică să cunoaștem o margine superioară a funcției $|R(f; x)|$, pentru orice $x \in E$.

În paragrafele următoare ne va interesa atât problema determinării funcției φ cât și problema determinării funcției $R(f; x)$, adică problema determinării **restului**.

1.2 Problema interpolării

Notăm cu $E = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ un interval al axei reale și cu F , mulțimea funcțiilor definite pe E cu valori în \mathbb{R} . Mulțimea F formează evident un spațiu vectorial. Alegem în mulțimea F o submulțime a sa I , numărabilă sau finită de funcții $\{\varphi_i\}$, despre care presupunem că orice sistem finit de elemente din I formează un sistem liniar independent. Submulțimea I poate fi formată din puterile succesive ale lui x cu exponent $n \in \mathbb{N}$, adică:

$$(1.2.1) \quad I = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

sau din funcții trigonometrice de forma:

$$(1.2.2) \quad I = \{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}.$$

De asemenea dacă $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ pentru $i \neq j$, atunci putem considera

$$(1.2.3) \quad I = \{1, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}, \dots\}.$$

Fie $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, primele $n + 1$ funcții din mulțimea I , pe care o presupunem ordonată și notăm cu I_n mulțimea tuturor combinațiilor liniare de forma:

$$(1.2.4) \quad a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Evident $I_n \subset F$.

Notăm cu

$$(1.2.5) \quad x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \quad x_i \neq x_j \text{ pentru } i \neq j$$

$m + 1$ puncte din intervalul E , pe care le numim **noduri de interpolare**. Problema interpolării constă în următoarele:

Fiecărei funcții $f \in F$, îi punem în corespondență o funcție $\varphi \in I_n$ de forma (1.2.4) astfel încât:

$$(1.2.6) \quad f(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, m+1}.$$

Mai general dacă f și φ sunt derivabile până la un anumit ordin pe punctele mulțimii x_i dată de (1.2.5), atunci putem pune condiția ca și valorile derivatelor funcțiilor f și φ de diferite ordine, pe punctele (1.2.5) să coincidă. Aceste probleme vor fi precizate în paragrafele următoare.

1.3 Determinarea funcțiilor de interpolare

Ne mărginim aici la problema determinării funcției $\varphi \in I_n$ cu condițiile date de (1.2.6).

Dacă ținem cont de forma funcției φ dată de (1.2.4), atunci din (1.2.6), pentru determinarea coeficientilor a_i , $i = \overline{0, n}$ obținem un sistem de $m + 1$ ecuații cu $n + 1$ necunoscute. Matricea sistemului amintit are următoarea formă:

$$(1.3.1) \quad A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_{m+1}) & \varphi_1(x_{m+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{m+1}) \end{pmatrix}.$$

Dacă dorim ca pentru orice funcție $f \in F$ să putem determina cel puțin o funcție $\varphi \in I_n$, atunci este necesar ca $\text{rang } A = m + 1$ și $n \geq m$. În plus dacă punem condiția ca fiecarei funcții $f \in F$ să-i corespundă o singură funcție $\varphi \in I_n$, atunci trebuie ca $n = m$ și determinantul:

$$(1.3.2) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_{n+1}) & \varphi_1(x_{n+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero.

În acest caz pentru orice $f \in F$ sistemul de $n + 1$ ecuații cu $n + 1$ necunoscute dat de (1.2.6) va avea o soluție unică și coeficientii a_i se pot pune sub forma:

$$(1.3.3) \quad a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{0, n},$$

unde determinanții Δ_i se obțin din Δ prin înlocuirea coloanei de rang i cu coloana termenilor liberi formată cu valorile $f(x_j)$, $j = \overline{1, n+1}$ ale funcției f pe nodurile (1.2.5).

În acest fel funcției $f \in F$ îi punem, în mod unic, în corespondență funcția φ de forma:

$$(1.3.4) \quad \varphi(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} \varphi_0(x) + \frac{\Delta_1}{\Delta} \varphi_1(x) + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta} \varphi_n(x).$$

Dacă dezvoltăm determinantii Δ_i , $i = \overline{0, n}$, după elementele coloanei de rang i obținem:

$$(1.3.5) \quad a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} f(x_j) \Delta_{ij}}{\Delta}, \quad i = \overline{0; n}$$

unde Δ_{ij} sunt complementi algebrici ai elementelor corespunzătoare coloanei de rang i . Astfel funcția φ mai poate fi pusă și sub următoarea formă:

$$(1.3.6) \quad \varphi(x) = f(x_1)\psi_0(x) + f(x_2)\psi_1(x) + \cdots + f(x_{n+1})\psi_n(x)$$

unde ψ_i , $i = \overline{0, n}$ sunt combinații liniare ale funcțiilor φ_i , $i = \overline{0, n}$ și în plus ele nu depind de funcția f , dar depind de nodurile x_i , $i = \overline{1, n+1}$.

Dacă punem condiția ca pentru orice funcție $f \in F$, funcția φ dată de (1.3.6) să verifice condițiile:

$$(1.3.7) \quad \begin{aligned} f(x_j) &= \varphi(x_j) = f(x_1)\psi_0(x_j) + f(x_2)\psi_1(x_j) + \\ &\quad + \cdots + f(x_{n+1})\psi_n(x_j), \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

atunci funcțiile ψ_i , $i = \overline{0, n}$ verifică egalitățile:

$$(1.3.8) \quad \psi_i(x_{j+1}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, i = \overline{0, n}, j = \overline{1, n+1}. \end{cases}$$

Vom pune acum problema ca funcția φ să poată fi determinată în mod unic, pentru fiecare funcție $f \in F$, oricum am alege nodurile $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in E$. Pentru aceasta, ipoteza ca orice sistem finit de funcții din I să fie liniar independent nu este suficientă. Astfel dacă considerăm $E = [0, \pi]$, $I_1 = \{1, \sin x\}$ și $x_1 \in E$, $x_2 = \pi - x_1$, atunci

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin x_2 \end{vmatrix} = 0$$

deși funcțiile 1 și $\sin x$ sunt liniar independente.

Se impune deci în acest caz, o condiție mai tare asupra funcțiilor φ_i , $i = \overline{0, n}$. Suntem conduși astfel la următoarea definiție:

Definiția 1.3.1. Spunem că sistemul de funcții $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in I$, formează un sistem Cebîșev sau sistem interpolator pe intervalul E , dacă pentru orice sistem de $n+1$ puncte x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ din intervalul E , determinantul Δ dat de (1.3.2) este diferit de zero.

Condiția ca un sistem de funcții φ_i , $i = \overline{0, n}$ să formeze un sistem interpolator pe E este echivalentă cu condiția ca orice ecuație de forma

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = 0$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ să admită cel mult n rădăcini în mulțimea E .

Din cele afirmate până aici rezultă fără dificultate următoarea teoremă:

Teorema 1.3.1. Dacă sistemul de funcții φ_i , $i = \overline{0, n}$ formează un sistem interpolator pe E , atunci pentru orice sistem de noduri $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in E$, $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$, și pentru orice funcție $f \in F$ există o singură funcție $\varphi \in I_n$ care verifică condițiile:

$$f(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

În paragrafele următoare ne va fi utilă următoarea generalizare a teoremei lui Rolle.

Teorema 1.3.2. Dacă funcțiile φ_i , $i = \overline{0, n}$ și funcția f verifică condițiile:

- i. funcțiile φ_i , $i = \overline{0, n}$ admit derivate pînă la ordinul $n + 1$ inclusiv pe intervalul E ;
- ii. funcția f admite derivate pînă la ordinul $n + 1$ inclusiv pe E , și ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin $n + 2$ rădăcini în intervalul E ;
- iii. toți determinanții de forma:

$$W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_k(x) \\ \varphi'_0(x) & \varphi'_1(x) & \cdots & \varphi'_k(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \cdots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

sunt diferenți de zero pentru orice $x \in E$.

Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât pe acest punct funcția:

$$L_{n+1}[f] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]}$$

ia valoarea zero.

În enunțul teoremei de mai sus am notat:

$$W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) & f(x) \\ \varphi'_0(x) & \varphi'_1(x) & \cdots & \varphi'_n(x) & f'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0^{(n)}(x) & \varphi_1^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) & f^{(n)}(x) \\ \varphi_0^{(n+1)}(x) & \varphi_1^{(n+1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n+1)}(x) & f^{(n+1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Considerăm operatorii L_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, n$, dată de relațiile

$$L_{k+1}[\varphi] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k]}$$

unde φ este o funcție care admite derivate până la ordinul $n + 1$ inclusiv pe E .

Vom arăta că există $n + 1$ funcții, b_0, b_1, \dots, b_n , definite pe E cu valori reale, astfel încât:

$$L_{k+1}[\varphi] = \frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi].$$

Întradevăr, L_{k+1} este operator diferențial liniar de ordin $k + 1$ cu coeficientul derivatei $\varphi^{(k+1)}(x)$ egal cu 1. Funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială $L_{k+1}[\varphi] = 0$, conform ipotezei *iii*.

Operatorul

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} L_k[\varphi] - b_k(x) L_k[\varphi] = \\ &= \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi] -}{W^2[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}]} \\ & \quad \frac{-W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi] \frac{d}{dx} W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}]}{W^2[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}]} - b_k L_k[\varphi], \end{aligned}$$

este tot un operator diferențial de ordin $k + 1$, cu coeficientul derivatei $\varphi^{(k+1)}(x)$ egal cu 1. Din faptul că $L_k[\varphi_i] = 0$ pentru $i = \overline{0, k-1}$, rezultă că au loc identitățile:

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi_i] - b_k(x) L_k[\varphi_i] = 0, \text{ pentru } i = \overline{0, k-1} \text{ și orice } x \in E.$$

Dacă punem

$$b_k(x) = \frac{\frac{d}{dx} L_k[\varphi_k]}{L_k[\varphi_k]}, \quad \text{pentru orice } x \in E$$

atunci are loc și egalitatea

$$\frac{d}{dx} L_k[\varphi_k] - b_k(x) L_k[\varphi_k] = 0, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Deoarece $L_k[\varphi_k]$ este diferită de zero pentru $x \in E$, rezultă că b_k este funcție continuă pe E . Din cele arătate rezultă că sistemul de funcții $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ este fundamental pentru operatorul diferențial

$$\frac{d}{dx}L_k[\varphi] - b_k(x)L_k[\varphi] = 0$$

și deci L_{k+1} se poate reprezenta astfel:

$$L_{k+1}^{[\varphi]} = \frac{d}{dx}L_k[\varphi] - b_k L_k[\varphi].$$

Considerăm acum funcția $g_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g_1(x) = f(x) \cdot \exp\left(-\int_a^x b_0(t)dt\right), \quad a \in E,$$

pentru care avem:

$$g'_1(x) = [f'(x) - b_0(x)f(x)] \exp\left(-\int_a^x b_0(t)dt\right) = L_1[f] \exp\left(-\int_a^x b_0(t)dt\right).$$

Funcția g_1 are, conform ipotezei *ii* cel puțin, $n+2$ rădăcini pe E , care coincid cu rădăcinile lui f și atunci, conform teoremei lui Rolle, ecuația $g'(x) = 0$ va avea cel puțin $n+1$ rădăcini pe intervalul E , adică $L_1[f]$ are cel puțin $n+1$ rădăcini pe E .

În continuare dacă considerăm $g_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$, dată de relația

$$g_2(x) = L_1[f] \cdot \exp\left(-\int_a^x b_1(t)dt\right),$$

atunci un raționament analog ne conduce la concluzia că funcția:

$$g'_2(x) = L_2[f] \cdot \exp\left(-\int_a^x b_1(t)dt\right),$$

are cel puțin n rădăcini pe E și deci $L_2[f]$ are cel puțin n rădăcini pe E . Continuând acest procedeu vom deduce, din aproape în aproape, că ecuația

$$L_{n+1}[f] = 0$$

are cel puțin o rădăcină pe E .

Teorema demonstrată aici ne dă posibilitatea să dăm condiții suficiente pentru ca un sistem de funcții să fie interpolator, adică are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.3.3. Dacă $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ admit derivate până la ordinul $n + 1$ inclusiv pe E și determinanții $W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k]$ sunt diferenți de zero pentru orice $x \in E$ și pentru orice $k = \overline{0, n}$, atunci funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ formează un sistem interpolator pe E .

Demonstrație. Presupunem că ipotezele teoremei sunt îndeplinite, dar funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ nu formează un sistem interpolator, atunci există o funcție de forma:

$$g(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

unde $c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 > 0$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$ pentru care ecuația $g(x) = 0$ are cel puțin $n + 1$ rădăcini pe E . De aici rezultă, conform Teoremei 1.3.2, că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care funcția $L_n[g]$ ia valoarea zero. Folosind o proprietate elementară a determinanților deducem ușor următoarea egalitate

$$L_n[g] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, g]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}]} = c_n \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}]},$$

de unde, ținând cont de ipotezele teoremei, din egalitatea $L_n[g] = 0$ pentru $x = c$, rezultă că $c_n = 0$. De aici rezultă că ecuația

$$g(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = 0$$

are cel puțin $n + 1$ rădăcini pe intervalul E . Repetând raționamentul de mai sus pentru $L_{n-1}[g]$, deducem că $c_{n-1} = 0$ și în continuare vom obține egalitățile $c_i = 0$ pentru orice $i = \overline{0, n}$, ceea ce contrazice ipoteza pe care s-a bazat acest raționament.

Fie în continuare $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ un sistem interpolator, atunci funcția de interpolare φ dată de (1.3.4) se poate determina în mod unic pentru fiecare funcție $f \in F$.

Vom presupune că sunt îndeplinite condițiile teoremei 1.3.3. În aceste ipoteze vom determina restul în formula de interpolare dată de funcția φ din relația (1.3.4).

Pentru aceasta considerăm funcția $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K(x, s) = W^{-1}[\varphi_0(s), \varphi_1(s) \dots \varphi_n(s)].$$

$$(1.3.9) \quad \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi'_0(s) & \varphi'_1(s) & \cdots & \varphi'_n(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^n g_i(s)\varphi_i(x).$$

Această funcție în variabila x este o combinație liniară a funcțiilor φ_i , $i = \overline{0, n}$ și deci $L_{n+1}[K(x, s)] = 0$ pentru orice $x \in E$ și orice $s \in E$ unde:

$$(1.3.10) \quad L_{n+1}[K(x, s)] = \frac{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, K(x, s)]}{W[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]}$$

Din (1.3.9) deducem egalitățile:

$$(1.3.11) \quad \left. \frac{\partial^l K(x, s)}{\partial x^l} \right|_{x=s} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } l \leq n-1, \\ 1, & \text{dacă } l = n-1. \end{cases}$$

Observăm acum că funcția $y : E \rightarrow \mathbb{R}$ dată de relația:

$$(1.3.12a) \quad y(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) + \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds, \quad \text{unde } a \in E,$$

verifică ecuația:

$$(1.3.12b) \quad L_{n+1}[y] = \psi(x),$$

pentru orice $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$. Întradevăr ținând cont că L_{n+1} este operator liniar, obținem:

$$L_{n+1}[y] = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_{n+1}[\varphi_i] + L_{n+1} \left[\int_a^x K(x, s) \psi(s) ds \right]$$

dar $L_{n+1}[\varphi_i] = 0$ pentru orice $i = \overline{0, n}$ și deci

$$(1.3.12) \quad L_{n+1}[y] = L_{n+1} \left[\int_a^x K(x, s) \psi(s) ds \right]$$

Pentru a dovedi egalitatea (1.3.12b) vom arăta că:

$$L_{n+1} \left[\int_a^x K(x, s) \psi(s) ds \right] = \psi(x)$$

Pentru aceasta calculăm derivatele succesive ale funcției h dată de $h(x) = \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds$ și obținem:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x K(x, s) \psi(s) ds \right] = K(x, x) \psi(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} \psi(s) ds$$

dar $K(x, x) = 0$ conform cu egalitățile (1.3.11) și deci

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds = \int_a^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} \psi(s) ds$$

Aplicînd îm mod repetat raționamentul de mai sus și ținând cont de fiecare dată de egalitățile (1.3.11) obținem:

$$\frac{d^l}{dx^l} \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds = \int_a^x \frac{\partial^l K(x, s)}{\partial x^l} \psi(s) ds$$

pentru orice $l \leq n$. Pentru $l = n + 1$ vom obține:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x k(x, s) \psi(s) ds = \frac{\partial^n K(x, x)}{\partial x^n} \psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{n+1} K(x, s)}{\partial x^{n+1}} \psi(s) ds$$

de unde ținând cont de (1.3.11) deducem:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds = \psi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{n+1} K(x, s)}{\partial x^{n+1}} \psi(s) ds.$$

Din egalitățile de mai sus rezultă egalitatea:

$$L_{n+1} \left[\int_a^x K(x, s) \psi(s) ds \right] = \psi(x) + \int_a^x L_{n+1}[K(x, s)] \psi(s) ds$$

de unde ținând cont de observația conform căreia $L_{n+1}[K(x, s)] = 0$ pentru orice $x, s \in E$, rezultă egalitatea dorită.

Observăm acum că dacă în locul funcțiilor φ_i , $i = \overline{0, n}$, considerăm orice alt sistem de $n + 1$ funcții liniar independente, care sunt soluții ale ecuației

$$L_{n+1}[\varphi] = 0,$$

obținem aceeași funcție K, dată de (1.3.9). Întradevăr fie $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, $n+1$, astfel de funcții, adică $L_{n+1}[\psi_i] = 0$, $i = \overline{0, n}$ și

$$\psi_i(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \varphi_j(x), \quad i = \overline{0, n}$$

unde coeficienții α_{ij} , $i, j = \overline{0, n}$ verifică relația

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ținând cont de cele de mai sus și aplicînd proprietățile determinanților, obținem:

$$\begin{vmatrix} \psi_0(s) & \psi_1(s) & \cdots & \psi_n(s) \\ \psi'_0(s) & \psi'_1(s) & \cdots & \psi'_n(s) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \psi_0^{(n-1)}(s) & \psi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(s) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & \cdots & \psi_n(x) \end{vmatrix} = D \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \varphi'_0(s) & \varphi'_1(s) & \cdots & \varphi'_n(s) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_0^{(n-1)}(s) & \varphi_1^{(n-1)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

de unde rezultă afirmația referitoare la funcția K .

Funcțiile ψ_i , $i = \overline{0, n}$ din (1.3.6) sunt, așa cum am văzut, combinații liniare ale funcțiilor φ_i , $i = \overline{0, n}$ și aceste funcții sunt liniar independente, deoarece dacă ținem cont de (1.3.8) și presupunem că există c_i , $\overline{0, n}$ nu toți nuli pentru care

$$c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \dots + c_n\psi_n(x) = 0 \quad \text{oricare ar fi } x \in E,$$

atunci pentru $x = x_i$, ținând cont de proprietățile funcțiilor ψ_i , $i = \overline{0, n}$, adică $\psi_{i-1}(x_i) = 1$ obținem $c_{i-1} = 0$, $i = \overline{1, n+1}$.

Având în vedere cele de mai sus, rezultă că funcția K dată de (1.3.9), unde φ_i se înlocuiește cu ψ_i , $i = \overline{0, n}$, se poate pune sub forma:

$$K(x, s) = \sum_{i=0}^n G_i(s) \psi_i(x).$$

Dacă ținem cont de (1.3.8) obținem:

$$K(x_j, s) = \sum_{i=0}^n G_i(s) \psi_i(x_j) = G_{j-1}(s),$$

adică

$$K(x, s) = \sum_{i=0}^n K(x_{i+1}, s) \psi_i(x).$$

Dacă folosim faptul că ecuația (1.3.12b) este verificată de orice funcție y de forma:

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i \psi_i(x) + \sum_{i=0}^n \psi_i(x) \int_{x_{i+1}}^x G_i(s) ds$$

și $y(x_{i+1}) = \beta_i$, $i = \overline{0, n}$, obținem în particular pentru funcția h dată de egalitatea

$$h(x) = \sum_{i=0}^n \psi_i(x) \int_{x_{i+1}}^x G_i(s) ds,$$

următoarele proprietăți:

$$(1.3.13) \quad L_{n+1}[h] = 1$$

și

$$h(x_j) = 0 \quad \text{pentru } j = \overline{1, n+1}$$

adică ecuația $h(x) = 0$, nu poate avea, conform Teoremei 1.3.2 decât rădăcinile x_j , $j = \overline{1, n+1}$, în caz contrar ar fi contrazisă egalitatea (1.3.13).

Fie acum φ dată de egalitatea (1.3.6) și funcția $R : E \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$R(x) = f(x) - \varphi(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n f(x_{i+1}) \psi_i(x).$$

Ecuația $R(x) = 0$ are rădăcinile x_i , $i = \overline{1, n+1}$, atunci ținând cont de observația de mai sus relativă la funcția h , rezultă că și ecuația $\psi(x) = 0$, unde $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ are forma:

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) - Mh(x), \quad M \in \mathbb{R}$$

nu poate avea mai puțin de $n+1$ rădăcini pe E . Mai mult, rădăcinile ecuației $\psi(x) = 0$ sunt nodurile de interpolare x_i , $i = \overline{1, n+1}$.

Fie $z \neq x_i$, $i = \overline{1, n+1}$ și $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\psi(z) = 0$, adică $M = \frac{f(z) - \varphi(z)}{h(z)}$. Pentru M , astfel determinat, ecuația $\psi(x) = 0$, va avea $n+2$ rădăcini pe E . Aplicăm acum Teorema 1.3.2 și rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$L_{n+1} [\psi(c)] = 0.$$

Ținând cont de (1.3.13) și de semnificația operatorului L_{n+1} obținem:

$$L_{n+1} [\psi(x)] = L_{n+1} [f(x)] - M,$$

de unde pentru $x = c$ obținem

$$M = L_{n+1} [f(c)]$$

care împreună cu egalitatea

$$M = \frac{f(z) - \varphi(z)}{h(z)}$$

ne conduce la:

$$f(z) - \varphi(z) = L_{n+1} [f(c)] \cdot h(z),$$

adică, restul $R[f; x]$, are următoarea formă:

$$(1.3.14) \quad R[f; x] = L_{n+1} [f(c)] h(x).$$

1.4 Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Problema pe care o vom analiza aici nu o vom trata ca un caz particular al problemelor tratate în paragrafele anterioare, pentru că aşa cum vom constata, o tratare independentă ne va pune în evidență multe proprietăți care se vor obține mai ușor decât prin particularizări ale rezultatelor din paragrafele anterioare.

Definiția 1.4.1. *Numim polinom de interpolare al lui Lagrange, al funcției f , un polinom P_n , de grad cel mult n , care pe nodurile (1.2.5) ia valorile $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.*

Existența și unicitatea acestui polinom este evident asigurată de faptul că funcțiile φ_i ; $\varphi_i(x) = x^i$, $i = \overline{0, n}$ formează un sistem interpolator, deoarece după cum este bine cunoscut, orice polinom de grad n nu poate avea mai mult de n rădăcini reale.

Noi vom dovedi existența și unicitatea polinomului lui Lagrange fără să ne bazăm direct pe observația de mai sus.

Arătăm prin inducție completă că există un polinom de grad cel mult s , $P_s(x)$ care pe punctele x_i , $i = \overline{1, s+1}$ ia valorile $f(x_i)$, $i = \overline{1, s+1}$, adică $P_s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1, s+1}$, pentru orice $s = \overline{0, n}$.

Într-adevăr, pentru $s = 0$, polinomul de grad zero $P_0(s) = f(x_1)$ verifică condiția cerută.

Presupunem că există un polinom P_{k-1} de grad cel mult $k - 1$ care verifică condițiile $P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, k}$, unde $k < n$. Observăm atunci că polinomul P_k , dat de egalitatea:

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + [f(x_{k+1}) - P_{k-1}(x_{k+1})] \frac{\prod_{i=1}^k (x - x_i)}{\prod_{i=1}^k (x_{k+1} - x_i)}$$

este de grad cel mult k și verifică egalitățile $P_k(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1, k+1}$. Cu aceasta existența polinomului lui Lagrange este dovedită.

Să arătăm în continuare că un astfel de polinom este unic. Pentru aceasta admitem prin absurd că ar exista cel puțin două polinoame P_n și Q_n de grad cel mult n care să verifice condițiile

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f(x_i), \text{ pentru orice } i = \overline{1, n+1}$$

Observăm acum că polinomul H_n , $H_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$ este de grad cel mult n și $H_n(x_i) = 0$ pentru orice $i = \overline{1, n+1}$, ceea ce este absurd. Cu aceasta unicitatea este dovedită.

Observația 1.4.1. Dacă asupra unui polinom P punem numai condițiile de interpolare, adică

$$(1.4.1) \quad P(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{1, n+1}$$

fără a pune restricții asupra gradului, atunci există o infinitate de polinoame care verifică aceste condiții.

Într-adevăr, dacă notăm cu $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x)$ polinomul lui Lagrange pe nodurile x_i , $i = \overline{1, n+1}$ al funcției f , atunci polinomul P dat de relația

$$P(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) + Q(x) \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$$

unde Q este polinom arbitrar neidentic nul, verifică condițiile (1.4.1) și gradul său este cel puțin $n + 1$.

Observația 1.4.2. Polinomul de interpolare al lui Lagrange poate fi caracterizat și prin aceea că el este polinomul de grad efectiv minim care verifică condițiile (1.4.1).

Această afirmație este o consecință imediată a faptului că polinomul lui Lagrange este unicul polinom, de grad cel mult n , care verifică (1.4.1).

În continuare vom stabili forma polinomului lui Lagrange în funcție de nodurile x_i și valorile $f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Pentru aceasta considerăm polinomul lui Lagrange de forma

$$(1.4.2) \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) f(x_i)$$

unde $l_i(x)$ sunt polinoame de grad n ce urmează să fie determinate cu condițiile (1.4.1). Din (1.4.1) deducem ușor pentru $l_i(x)$, $i = \overline{1, n+1}$, următoarele condiții:

$$(1.4.3) \quad l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j, i, j = \overline{1, n+1}. \end{cases}$$

Dacă notăm cu ω polinomul $\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$, atunci l_i se poate exprima cu ajutorul lui ω astfel:

$$(1.4.4) \quad l_i(x) = \frac{c_i \omega(x)}{x - x_i}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

unde $c_i \in \mathbb{R}$. Se observă că l_i dați de (1.4.4) verifică relațiile $l_i(x_j) = 0$ dacă $i \neq j$; $i, j = \overline{1, n+1}$. Pentru $i = j$ avem:

$$l_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{c_i \omega(x)}{x - x_i} = c_i \omega'(x_i) = 1, \quad i = \overline{1, n+1}$$

de unde se vede că dacă luăm $c_i = \frac{1}{\omega'(x_i)}$, atunci polinoamele l_i , $i = \overline{1, n+1}$ verifică egalitățile (1.4.3).

Dacă ținem cont de (1.4.2) atunci, pentru polinomul lui Lagrange, avem următoarea formă:

$$(1.4.5) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)};$$

unde aşa cum am notat mai sus

$$(1.4.6) \quad \omega(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j).$$

Presupunând că $f \in F$, atunci putem face următoarea observație:

Observația 1.4.3. *Restricția oricărei funcții $f \in F$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la o mulțime formată din $n + 1$ puncte din E , coincide cu restricția polinomului lui Lagrange al lui f , de grad n , la aceeași mulțime de puncte.*

Unicitatea polinomului lui Lagrange, precum și observația (1.4.3) ne dă posibilitatea să arătăm ușor că:

Observația 1.4.4. *Dacă $f \in F$ este un polinom de grad cel mult n , atunci $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Din (1.4.5) se deduce imediat următoarea proprietate:

Teorema 1.4.1. *Dacă $f_1, f_2 \in F$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \alpha f_1 + \beta f_2 | x) &= \\ &= \alpha L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f_1 | x) + \beta L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f_2 | x). \end{aligned}$$

Această teoremă ne arată că dacă privim polinomul lui Lagrange ca aplicație de la F la mulțimea polinoamelor de grad cel mult n , atunci aceasta este liniară, adică aditivă și omogenă.

În continuare vom stabili o relație de recurență între polinoame ale lui Lagrange de grade consecutive și anume:

Teorema 1.4.2. Între polinoamele lui Lagrange pe $n+1$, respectiv n noduri, există următoarea relație de recurență:

$$(1.4.7) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = \\ = \frac{(x - x_1)L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f|x) - (x - x_{n+1})L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x)}{x_{n+1} - x_1}$$

Demonstratie. Notăm cu:

$$(1.4.8) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

coeficientul lui x^n din polinomul lui Lagrange. Se constată ușor că polinomul lui Lagrange poate fi pus sub oricare din următoarele două forme

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x) + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \frac{\omega(x)}{x - x_{n+1}}$$

sau

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f|x) + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \frac{\omega(x)}{x - x_1},$$

de unde, dacă înmulțim prima egalitate cu $x - x_{n+1}$ și cea de a doua cu $x - x_1$ și scădem rezultatele, obținem relația (1.4.7).

Formula de recurență (1.4.7) se mai poate exprima cu ajutorul unui determinant de ordin 2 astfel

$$(1.4.9) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f|x) = \begin{vmatrix} L(x_1, x_2, \dots, x_i; f|x) & x_1 - x \\ L(x_2, x_3, \dots, x_{i+1}; f|x) & x_{i+1} - x \end{vmatrix}_{x_{i+1} - x_1}, i = 1, 2, \dots, n,$$

cu notațiile $L(x_1; f|x) = f(x_1)$ și $L(x_2; f|x) = f(x_2)$.

Formula de recurență (1.4.9) se numește formula lui Aitken pentru polinomul lui Lagrange.

În cele ce urmează vom observa că dacă f este funcția constantă egală cu 1 pentru orice $x \in E$, atunci are loc identitatea

$$(1.4.10) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} = 1 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Această identitate ne dă posibilitatea să punem în evidență forma **baricentrică** a polinomului lui Lagrange, și anume:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} = \\ &= \frac{\omega(x) \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}}{\omega(x) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}} \end{aligned}$$

adică

$$(1.4.11) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(x - x_i) \omega'(x_i)}}.$$

Expresia dată de forma baricentrică (1.4.11) a polinomului lui Lagrange poate fi folosită pentru simplificarea calculelor atunci când valorile polinomului lui Lagrange pentru noduri fixate se calculează pentru un sistem de valori dat. În acest sens se observă că, pentru calculul fiecărei din expresiile $\omega'(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$, sunt necesare n produse care depind numai de nodurile de interpolare x_i , $i = \overline{1, n+1}$ și nu depind de diferențele $x - x_i$, $i = \overline{1, n+1}$. Din acest motiv, dacă nodurile de interpolare nu se schimbă, valorile $\omega'(x_i)$ pot fi calculate o singură dată.

De următoarele noțiuni vom avea nevoie în paragrafele următoare.

Fie $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă până la ordinul $n + 1$ pe E .

Pentru zerourile multiple ale funcției g , adică pentru rădăcinile multiple ale ecuației $g(x) = 0$ din E , vom admite următoarea definiție:

Definiția 1.4.2. Spunem că \bar{x} este un zero multiplu de ordin k , $k \in \mathbb{N}$ pentru funcția g , dacă $g(\bar{x}) = g'(\bar{x}) = \dots = g^{(k-1)}(\bar{x}) = 0$, unde $k \leq n + 1$ și $g^{(k)}(\bar{x}) \neq 0$. Dacă x_1, x_2, \dots, x_s sunt zerouri multiple ale funcției f pe mulțimea E , cu ordinele de multiplicitate respective k_1, k_2, \dots, k_s , și dacă $k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$, atunci vom spune că g are m zerouri în intervalul E .

Pentru a determina restul în formula de interpolare a lui Lagrange, precum și pentru alte formule de interpolare pe care le vom determina ulterior, ne vor fi utile următoarele două leme.

Lema 1.4.1. *Dacă funcția $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea că ecuația $g(x) = 0$ are cel puțin $n+2$ rădăcini simple sau multiple în E și dacă g este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe E , atunci există cel puțin un punct $c \in E$, astfel încât $g^{(n+1)}(c) = 0$. Punctul c poate să coincidă cu una din extremitățile intervalului $[a, b]$, dacă și numai dacă rădăcinile ecuației $g(x) = 0$ cu ordinul de multiplicitate $n+2$ coincid toate cu acea extremitate.*

Demonstratie. Vom arăta mai întâi că funcția g' , derivata lui g are cel puțin $n+1$ zerouri în E . Conform teoremei lui Rolle, între fiecare două zerouri consecutive ale lui g există cel puțin un zero al lui g' . De aceea dacă x_s , $s = \overline{1, n+2}$ sunt zarouri simple ale lui g , atunci g' va avea cel puțin $n+1$ zerouri. Dacă însă g are și zerouri multiple, fie acestea $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$, cu ordinele de multiplicitate k_1, k_2, \dots, k_p , astfel încât $k_1 + k_2 + \dots + k_p = q$ și $k_i \geq 2$, $i = \overline{1, p}$, atunci ecuația $g(x) = 0$ mai are încă $n+2-q$ rădăcini simple. În total există $p+n+2-q$ puncte distincte din E pe care funcția g ia valoarea zero. Conform teoremei lui Rolle, derivata g' va avea pe $p+n+2-q-1$ rădăcini care sunt diferite de rădăcinile multiple x_1, x_2, \dots, x_p considerate mai înainte. Dar x_1, x_2, \dots, x_p fiind rădăcini multiple, ele sunt zerouri ale lui g' , cu ordinele de multiplicitate $k_i - 1$, $i = \overline{1, p}$, deci în total g' va mai avea încă $q-p$ zerouri. Rezultă deci că g' are $(p+n+2-q-1) + (q-p) = n+1$ rădăcini pe E .

Raționamentul de mai sus poate continua pentru $g', g'', \dots, g^{(n)}$ și în final există $c \in E$, astfel încât $g^{(n+1)}(c) = 0$. Cu aceasta prima parte a lemei este demonstrată.

Pentru cea de-a doua parte considerăm două cazuri și anume:

- a. $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+2}$. În acest caz, deoarece x_1 este rădăcină cu ordinul de multiplicitate $n+2$, rezultă $g^{(n+1)}(x_1) = 0$ și deci putem lua $c = x_1$.
- b. Între rădăcinile ecuației $g(x) = 0$ sunt cel puțin două diferite.

În acest caz vom raționa prin inducție și anume: pentru $n = 0$ proprietatea rezultată din teorema lui Rolle, deci ea este adevărată. Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru un număr natural $k \leq n+2$. Atunci rezultă că funcția g' , care are cel puțin $k-1$ zerouri pe E , verifică condiția conform căreia $(g'(x))^{(k-2)}$ va avea cel puțin un zero pe E , adică există $c \in E$ pentru care $g^{(k-1)}(c) = 0$. Pentru $k = n+2$, obținem $g^{(n+1)}(c) = 0$. Evident dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+2} = a$ sau $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+2} = b$ atunci $c = a$ sau $c = b$ aşa cum s-a arătat la cazul a.

Lema 1.4.2. *Dacă funcțiile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, verifică condițiile:*

- i. f și g sunt derivabile până la ordinul $n+1$ inclusiv pe E ;

ii. există $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ și $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$(1.4.12) \quad f^{(j)}(x_i) = g^{(j)}(x_i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k_i - 1; \quad i = \overline{1, m}$$

unde $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n + 1$;

iii. pentru orice $x \in E$, $g^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Atunci pentru orice punct $x_0 \neq x_i$, $i = \overline{1, m}$, $x_0 \in E$, valoarea funcției g pe punctul x_0 este diferită de zero și există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care

$$(1.4.13) \quad \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

Demonstrație. Arătăm mai întâi că dacă $x_0 \neq x_i$, $i = \overline{1, m}$ atunci $g(x_0) \neq 0$. Într-adevăr, dacă există $x_0 \in E$, $x_0 \neq x_i$, $\overline{1, m}$ pentru care $g(x_0) = 0$, atunci g are $n + 2$ zerouri pe E și deci conform Lemei 1.4.1, există cel puțin un punct $a \in E$ pentru care $g^{(n+1)}(a) = 0$, fapt ce contrazice ipoteza iii. Pentru cea de-a doua parte a lemei vom considera funcția $h : E \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$, unde dacă luăm $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ și ținem cont de (1.4.12), obținem pentru h următoarele proprietăți:

$$(1.4.14) \quad h(x_0) = 0, \quad h^{(j)}(x_i) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, k_i - 1; \quad i = \overline{1, m}$$

deci h are $n + 2$ rădăcini pe E . Conform lemei 1.4.1 rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ pentru care $h^{(n+1)}(c) = 0$, adică $f^{(n+1)}(c) - \lambda g^{(n+1)}(c) = 0$, de unde ținând cont de valoarea aleasă pentru λ obținem egalitatea (1.4.13).

Stabilim în cele ce urmează forma restului în formula de interpolare a lui Lagrange. Pentru aceasta considerăm polinomul lui Lagrange pe nodurile (1.2.5) pentru $m = n$, al funcției $f \in F$, $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x)$. Are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.4.3. *Dacă funcția f admite derivate până la ordinul $n + 1$ inclusiv pe intervalul (a, b) , atunci, pentru orice $x \in E$, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât:*

$$(1.4.15) \quad f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \omega(x),$$

$$\text{unde } \omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Demonstrație. Considerăm funcția $g : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(z) = f(z) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|z) - \alpha \omega(z)$$

Fie $x \in E$, $x \neq x_i$, $i = \overline{1, n+1}$, astfel încât $g(x) = 0$. În acest caz x_1, x_2, \dots, x_{n+1} și x sunt $n+2$ rădăcini ale lui g . Din egalitatea $g(x) = 0$ rezultă

$$\alpha = \frac{f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)}{\omega(x)} = \frac{\psi(x)}{\omega(x)}$$

Pe de altă parte, conform Lemei 1.4.2, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{\psi(x)}{\omega(x)} = \frac{\psi^{(n+1)}(c)}{\omega^{(n+1)}(c)}$. Dar $\psi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c)$ și $\omega^{(n+1)}(c) = (n+1)!$ și atunci din (1.4.14) obținem:

$$\frac{f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)}{\omega(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

adică egalitatea (1.4.15).

Dacă funcția $f^{(n+1)}(x)$ este mărginită pe $[a, b]$ și punem $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$, atunci din (1.4.15) obținem o majorare pentru rest, adică:

$$(1.4.16) \quad |f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

1.5 Diferențe divizate cu noduri simple

Revenim aici asupra coeficientului lui x^n din polinomul lui Lagrange dat de (1.4.8).

Definiția 1.5.1. *Numim diferență divizată de ordin n a funcției $f \in F$, pe nodurile x_i , $i = \overline{1, n+1}$, coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare al lui Lagrange al funcției f pe nodurile specificate.*

Așa cum rezultă din (1.4.8), pentru diferență divizată vom folosi notația $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$, adică:

$$(1.5.1) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}.$$

Din formula de recurență pentru polinoamele lui Lagrange (1.4.7) și Definiția 1.5.1. se deduce, fără dificultate, următoarea formulă de recurență pentru diferențele divizate:

$$(1.5.2) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}$$

cu convenția $[x_i; f] = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Următoarele proprietăți ale diferențelor divizate sunt evidente:

Proprietatea 1.5.1. Diferența divizată $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \cdot]$ este o funcțională liniară pe F cu valori reale, adică pentru orice $f, g \in F$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \alpha f + \beta g] = \alpha[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] + \beta[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; g].$$

Proprietatea 1.5.2. Diferența divizată este o funcție simetrică în raport cu nodurile de interpolare, adică are loc egalitatea:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f]$$

pentru orice permutare $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Din unicitatea polinomului de interpolare al lui Lagrange rezultă egalitățile date de:

Proprietatea 1.5.3. Diferența divizată a funcției f pe $n+1$ noduri verifică egalitățile:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) = x^i, \quad i = \overline{0, n-1} \\ 1 & \text{dacă } f(x) = x^n. \end{cases}$$

Vom arăta în continuare că are loc o proprietate mai generală și anume:

Proprietatea 1.5.4. Dacă $f(x) = x^{n+i}$, unde $i \geq 1$, atunci are loc egalitatea

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_{n+1}^{a_{n+1}},$$

unde suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor întregi și nenegative ale ecuației: $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = i$.

Demonstrație. Fără a restrângere generalitatea, putem propune că $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, n+1}$. Notăm cu $r = \min \left\{ \frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_{n+1}|} \right\}$. Atunci pentru orice $z \in (-r, r)$ are loc egalitatea:

$$(1.5.3) \quad \begin{aligned} & \frac{z^n}{(1 - zx_1)(1 - zx_2) \cdots (1 - zx_{n+1})} = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1 - zx_i) \omega'(x_i)} = \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{1 - zx_i} \right]. \end{aligned}$$

Prima din egalitățile de mai sus se obține prin dezvoltarea funcției din stânga în funcții simple, iar ultima este o consecință a egalității (1.5.1).

Din egalitatea evidentă:

$$\frac{1}{1-zx} = \frac{z^n x^n}{1-zx} + 1 + zx + z^2 x^2 + \cdots + z^{n-1} x^{n-1},$$

ținând cont de Proprietățile 1.5.1. - 1.5.3., rezultă egalitatea

$$(1.5.4) \quad \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{1-zx} \right] = z^n \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{x^n}{1-zx} \right].$$

Din (1.5.3) și (1.5.4) rezultă:

$$(1.5.5) \quad \frac{1}{(1-zx_1)(1-zx_2) \cdots (1-zx_{n+1})} = \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{x^n}{1-zx} \right].$$

Dar dacă ținem cont de faptul că:

$$\frac{x^n}{1-zx} = x^n + x^{n+1}z + x^{n+2}z^2 + \cdots + x^{n+i}z^i + \cdots$$

atunci folosind Proprietatea 1.5.1. rezultă:

$$\left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{x^n}{1-zx} \right] = S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_i z^i + \cdots$$

unde

$$S_i = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x^{n+i}], \quad i = 0, 1, \dots, .$$

Dacă dezvoltăm acum în serie funcția din membrul stâng al egalității (1.5.5) obținem:

$$\frac{1}{(1-zx_1)(1-zx_2) \cdots (1-zx_{n+1})} = T_0 + T_1 z + \cdots + T_i z^i + \cdots$$

unde

$$T_i = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = i; \quad i = 0, 1, \dots, .$$

Egalând coeficienții acelorași puteri din cele două dezvoltări în serie obținem egalitatea cerută.

Aplicând formula de recurență a diferențelor divizate, și folosind inducția, se deduce de asemenea proprietatea:

Proprietatea 1.5.5. *Pentru orice $i \geq n$ are loc egalitatea*

$$(1.5.6) \quad [x_1, x_2, \dots, x_i; [x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}, x; f]] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f].$$

Proprietatea care urmează este o generalizare a formulei lui Leibnitz privind diferența divizată a produsului a două funcții. O demonstrație elegantă a acestei formule a fost dată de T. Popoviciu în [127]. Noi aici vom schița o demonstrație prin inducție, unde folosim formula de recurență a diferențelor divizate.

Proprietatea 1.5.6. *Dacă $f, g \in F$, atunci are loc următoarea egalitate:*

$$(1.5.7) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f \cdot g] = \sum_{i=1}^{n+1} [x_1, x_2, \dots, x_i; f][x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; g]$$

cu notația $[x_1; f] = f(x_1)$ și $[x_{n+1}; g] = g(x_{n+1})$.

Demonstrație. Formula (1.5.7) este evident adevărată pentru $n = 1$, deoarece:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_2) \cdot g(x_2) - f(x_1) \cdot g(x_1)}{x_2 - x_1} = \\ & = \frac{[f(x_2) - f(x_1)]g(x_2) + f(x_1)[g(x_2) - g(x_1)]}{x_2 - x_1} = \\ & = [x_1; f][x_1, x_2; g] + [x_1, x_2; f][x_2; g] \end{aligned}$$

Presupunem acum adevărate următoarele două egalități:

$$\begin{aligned} [x_2, x_3, \dots, x_{k+1}; f \cdot g] &= \sum_{i=2}^{k+1} [x_2, x_3, \dots, x_i; f][x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k+1}; g] \\ [x_1, x_2, \dots, x_k; f \cdot g] &= \sum_{i=1}^k [x_1, x_2, \dots, x_i; f][x_i, x_{i+1}, \dots, x_k; g] \end{aligned}$$

unde $k < n$.

Scăzând termen cu termen egalitățile de mai sus, împărțind rezultatul cu $x_{k+1} - x_1$ și grupând convenabil termenii din partea dreaptă obținem:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f \cdot g] = \sum_{i=1}^{k+1} [x_1, x_2, \dots, x_i; f][x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k+1}; g]$$

ceea ce ne demonstrează egalitatea în cauză.

Fie acum două funcții $\varphi, \psi : E \times E \setminus \{(x, y) \in E \times E; x = y\} \rightarrow \mathbb{R}$, date de relațiile:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{f(x)}{y - x}, \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{y - x} \end{aligned}$$

Notăm cu $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \varphi](y)$ diferența divizată de ordin n a funcției φ în raport cu prima variabilă, adică cu x și analog $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \psi](y)$ diferența divizată a funcției ψ , tot în raport cu variabila x .

Cu aceste precizări, pentru polinomul lui Lagrange al funcției f pe punctele x_1, x_2, \dots, x_{n+1} are loc egalitatea:

$$(1.5.8) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|z) = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \varphi](z)}{[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \psi](z)}, \quad z \neq x_i, \\ i = \overline{1, n+1}.$$

Această egalitate este o consecință imediată a relațiilor (1.4.11) și (1.5.1).

1.6 Polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton

În acest paragraf vom da o altă formă, decât cele date în paragrafele anterioare, pentru polinomul lui Lagrange.

Pentru aceasta considerăm următoarea identitate:

$$(1.6.1) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = \\ = \sum_{i=1}^n [L(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f|x) - L(x_1, x_2, \dots, x_i; f|x)] + L(x_1, f|x).$$

Fie

$$(1.6.2) \quad b_i(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f|x) - L(x_1, x_2, \dots, x_i; f|x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Observăm că b_i se bucură de următoarele proprietăți:

$$(1.6.3) \quad b_i(x_k) = 0, \quad k = \overline{1, i}$$

și

$$(1.6.4) \quad b_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) - L(x_1, x_2, \dots, x_i; f|x_{i+1}).$$

Din (1.6.2) rezultă că b_i este un polinom de grad cel mult i și deci având în vedere egalitățile (1.6.3) rezultă pentru b_i următoarea formă:

$$b_i(x) = A_i(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_i), \quad A_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Având în vedere (1.6.4) obținem pentru A_i următoarea valoare

$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) - L(x_1, x_2, \dots, x_i; f|x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_1)(x_{i+1} - x_2) \cdots (x_{i+1} - x_i)}$$

adică

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_1)(x_{i+1} - x_2) \cdots (x_{i+1} - x_i)} - \\
 &- \frac{\sum_{j=1}^i \frac{f(x_j)(x_{i+1} - x_1)(x_{i+1} - x_2) \cdots (x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_j)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_i)}}{(x_{i+1} - x_1)(x_{i+1} - x_2) \cdots (x_{i+1} - x_i)} = \\
 &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{i+1})} = \\
 &= [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f], \quad i = \overline{1, n}
 \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$(1.6.5) \quad b_i(x) = [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f][x - x_1](x - x_2) \cdots (x - x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Înlocuind (1.6.5) în (1.6.1) obținem pentru polinomul lui Lagrange următoarea formă:

$$\begin{aligned}
 (1.6.6) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) &= \\
 &= f(x_1) + \sum_{i=1}^n [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f](x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_i),
 \end{aligned}$$

adică polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton.

Ne propunem acum să dăm o exprimare corespunzătoare pentru rest, adică pentru diferență.

$$R_{n+1}(x) = f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)$$

Pentru aceasta demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 1.6.1. *Pentru orice $x \in E$ are loc egalitatea*

$$\begin{aligned}
 (1.6.7) \quad f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) &= \\
 &= [x, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f](x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1})
 \end{aligned}$$

unde $[x, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ este diferență divizată de ordin $n+1$ a funcției f pe nodurile specifice.

Demonstrăție. Procedăm prin inducție. Pentru $n = 0$ avem

$$\begin{aligned}
 R_1(x) &= f(x) - L(x_1; f|x) = f(x) - f(x_1) = \\
 &= [x_1, x; f](x - x_1) = [x, x_1; f](x - x_1)
 \end{aligned}$$

Presupunem în continuare că egalitatea (1.6.7) este adevărată pentru $n = k - 1$ unde $k \geq 1$, adică

$$(1.6.8) \quad f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_k; f|x) = [x, x_1, \dots, x_k; f](x - x_1) \cdots (x - x_k),$$

dar din formula de recurență a diferențelor divizate obținem

$$\frac{[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f] - [x, x_1, x_2, \dots, x_k; f]}{x_{k+1} - x} = [x, x_1, \dots, x_{k+1}; f]$$

adică

$$[x, x_1, \dots, x_k; f] = [x, x_1, \dots, x_{k+1}; f](x - x_{k+1}) + [x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f]$$

care împreună cu (1.6.8) ne arată că egalitatea (1.6.7) este adevărată și pentru $n = k$.

Din (1.6.7) și Teorema 1.4.3 rezultă următoarea teoremă:

Teorema 1.6.2. *Dacă funcția f este derivabilă până la ordinul $n + 1$ inclusiv, pe intervalul (y_1, y_2) , unde $y_1 = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+2}\}$, $y_2 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\}$, atunci există cel puțin un punct $c \in (y_1, y_2)$ astfel încât:*

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

1.7 Alte forme pentru polinomul lui Lagrange

Pentru prescurtare vom nota în acest paragraf polinomul lui Lagrange pe nodurile (1.2.5) cu $L(x)$, adică $L(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)$.

Deoarece condițiile de interpolare din definiția 1.4.1 determină în mod unic polinomul L , atunci există numerele reale a_0, a_1, \dots, a_n , astfel încât:

$$(1.7.1) \quad L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

care se pot determina rezolvând sistemul:

$$(1.7.2) \quad \begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n &= f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n &= f(x_2) \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_0 + a_1x_{n+1} + a_2x_{n+1}^2 + \cdots + a_nx_{n+1}^n &= f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dacă eliminăm coeficienții a_i , $i = \overline{0, n}$ din relațiile (1.7.1) și (1.7.2) obținem egalitatea:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n & L(x) \end{vmatrix} = 0$$

de unde obținem pentru L următoarea expresie

$$(1.7.3) \quad L(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}}.$$

De aici pentru diferența divizată rezultă următoarea expresie:

$$(1.7.4) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}}.$$

Propunem cititorului să încerce să deducă proprietățile polinomului lui Lagrange și ale diferențelor divizate, date în paragrafele anterioare, pornind de la expresiile (1.7.3) și (1.7.4) ale polinomului lui Lagrange și respectiv a diferenței divizate.

1.8 Interpolare cu noduri multiple; polinomul lui Hermite

Revenim acum asupra funcțiilor $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in I$ din paragraful 1.2 și presupunem că sunt date numerele naturale a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , $a_i \geq 1$, $i = \overline{1, n+1}$. Notăm cu:

$$(1.8.1) \quad m + 1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}$$

și presupunem că funcțiile φ_i , $i = \overline{0, m}$ și f sunt derivabile până la ordinul $m - n$ pe E , de asemenea considerăm iarăși nodurile de interpolare (1.2.5).

Punem următoarea problemă de interpolare cu noduri multiple:

Să se determine funcția $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$;

$$(1.8.2) \quad \varphi(x) = \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x)$$

astfel încât să fie verificate egalitățile

$$(1.8.3) \quad \varphi^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i); \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = 0, 1, \dots, a_i - 1.$$

Condițiile (1.8.3) determină coeficienții c_i din (1.8.2) în mod unic dacă determinantul

$$(1.8.4) \quad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi'_0(x_1) & \varphi'_1(x_1) & \cdots & \varphi'_m(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_0^{(a_1-1)}(x_1) & \varphi_1^{(a_1-1)} & \cdots & \varphi_m^{(a_1-1)}(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_0^{(a_{m+1}-1)}(x_{n+1}) & \varphi_1^{(a_{m+1}-1)}(x_{n+1}) & \cdots & \varphi_m^{(a_{m+1}-1)}(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

este diferit de zero.

Dacă determinantul (1.8.4) este diferit de zero pentru orice sistem de $n + 1$ noduri de forma (1.2.5) din E , atunci sistemul de funcții $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ formează un sistem interpolator față de problema de interpolare cu noduri multiple de mai sus, pe multimea E .

În cele ce urmează noi vom analiza numai cazul particular al funcțiilor φ_i ; $\varphi_i(x) = x^i$, $i = \overline{0, m}$.

Pentru a dovedi că aceste funcții formează un sistem interpolator pe \mathbb{R} , ar fi

necesar să calculăm determinantul corespunzător dat de (1.8.4). Este bine cunoscut că un astfel de determinant nu se calculează ușor și de aceea vom dovedi existența polinomului de interpolare cu noduri multiple fără a face apel la determinantul în cauză.

Notăm cu H_m polinomul de grad cel mult m care verifică condițiile corespunzătoare ce rezultă din (1.8.3).

Demonstrăm mai întâi că H_m dacă există este unic. Pentru aceasta procedăm analog ca pentru polinomul lui Lagrange, adică presupunem că există cel puțin două polinoame H_m și \bar{H}_m de grad cel mult m care verifică condițiile de interpolare:

$$H_m^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad \bar{H}_m^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = \overline{1; n+1}, \quad j = \overline{0; a_i - 1}$$

De aici rezultă că polinomul $\bar{\bar{H}}_m(x) = H_m(x) - \bar{H}_m(x)$ este de grad cel mult m și are $m + 1$ rădăcini, aşa cum rezultă din (1.8.1) și deci polinomul $\bar{\bar{H}}$ este identic nul.

Pentru claritatea expunerii de mai sus considerăm un exemplu.

Ne propunem să determinăm un polinom de grad cel mult $2n + 1$ care să verifice condițiile:

$$(1.8.5) \quad \begin{aligned} H_{2n+1}(x_i) &= f(x_i); \\ H'_{2n+1}(x_i) &= f'(x_i); \quad i = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

adică cazul particular al problemei anterioare pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 2$.

În acest caz evident $m = 2n + 1$. Punem

$$(1.8.6) \quad H_m(x) = L_n(x) + \omega(x)H_{m-n}(x)$$

unde $\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$. Calculăm derivata de ordinul 1 a funcției H_m și avem:

$$H'_m(x) = L'_n(x) + \omega'(x)H_{m-n}(x) + \omega(x) \cdot H'_{m-n}(x).$$

Din egalitatea de mai sus rezultă:

$$H_{m-n}(x_i) = \frac{H'_m(x_i) - L'_n(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

adică

$$H_{m-n}(x_i) = \frac{f'(x_i) - L'_n(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Din ultimele două relații rezultă pentru H_{m-n} expresia:

$$H_{m-n}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[f'(x_i) - L'_n(x_i)] \omega(x)}{(x - x_i) [\omega'(x_i)]^2},$$

care înlocuită în (1.8.6) ne conduce la:

$$(1.8.7) \quad H_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} + \omega(x) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{[f'(x_i) - L'_n(x_i)] \omega(x)}{(x - x_i) [\omega'(x_i)]^2}$$

În cele ce urmează vom exprima polinomul H_m numai cu ajutorul valorilor $f(x_i)$ și $f'(x_i)$; $i = \overline{1, n+1}$. Pentru aceasta notăm:

$$(1.8.8) \quad l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

polinoamele fundamentale ale lui Lagrange. În acest caz $L'_n(x_i)$ are următoarea formă:

$$L'_n(x_i) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x_j) l'_j(x_i).$$

Atunci membrul drept al egalității (1.8.13) se poate pune sub forma

$$\begin{aligned} (1.8.9) \quad H_m(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) l_i(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(x_j) l'_j(x_j) \omega(x)}{\omega'(x_i)} l_i(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} f'(x_i) (x - x_i) l_i^2(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \left[l_i(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \omega(x) \frac{l'_i(x_j)}{\omega'(x_j)} l_j(x) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} f'(x_i) (x - x_i) l_i^2(x) \end{aligned}$$

Dacă notăm:

$$p_i(x) = l_i(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \omega(x) \frac{l_i(x_j)}{\omega'(x_j)} l_j(x), \quad i = \overline{1, n+1},$$

atunci este evident că:

$$p_i(x_k) = l_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq k \\ 1 & \text{dacă } i = k. \end{cases}$$

Pe de altă parte pentru $p'(x)$ avem:

$$p'_i(x) = l'_i(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \omega'(x) \frac{l'_i(x_j)}{\omega'(x_j)} l_j(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \omega(x) \frac{l'_i(x_j)}{\omega'(x_j)} l'_j(x),$$

de unde pentru $x = x_k$, obținem

$$\begin{aligned} p'_i(x_k) &= l'_i(x_k) - \sum_{j=1}^{n+1} \omega'(x_k) \frac{l'_i(x_j)}{\omega'(x_j)} l_j(x_k) \\ &= l'_i(x_k) - l'_i(x_k) = 0, \text{ pentru orice } i, k = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

adică $x = x_k$, $k \neq i$ sunt rădăcini duble pentru $p_i(x)$, $k = \overline{1, n+1}$.

Deoarece gradul lui p_i este $2n+1$, atunci rezultă că p_i are drept factor pe $\frac{\omega^2(x)}{(x - x_i)^2}$ și deci poate fi scris sub forma

$$p_i(x) = \frac{\omega^2(x)}{(x - x_i)^2} [a + b(x - x_i)], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $p_i(x_i) = 1$, atunci din relația de mai sus deducem

$$1 = [\omega'(x_i)]^2 \cdot a,$$

adică

$$a = \frac{1}{[\omega'(x_i)]^2}.$$

Calculând derivatele funcțiilor p_i și trecând la limită în $p'(x)$, pentru $x \rightarrow x_i$ obținem:

$$0 = p'(x_i) = \omega'(x_i) \omega''(x_i) \cdot a + [\omega'(x_i)]^2 b,$$

de unde rezută:

$$b = -\frac{\omega''(x_i)}{[\omega'(x_i)]^3}.$$

Obținem atunci pentru polinoamele p_i următoarea reprezentare:

$$p_i(x) = \frac{\omega^2(x)}{(x - x_i)^2 [\omega'(x_i)]^2} \left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} (x - x_i) \right], \quad i = \overline{1, n+1}$$

care împreună cu (1.8.9) ne dau pentru H_m următoarea reprezentare:

$$(1.8.10) \quad \begin{aligned} H_m(x) = & \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{\omega^2(x)}{(x-x_i)^2 [\omega'(x_i)]^2} \left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} (x - x_i) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} f'(x_i) \frac{\omega^2(x)}{(x-x_i)[\omega'(x_i)]^2}. \end{aligned}$$

Vom nota polinomul determinat mai sus cu:

$$(1.8.11) \quad H_m(x) = H(x_1; 2; x_2; 2; \dots, x_{n+1}; 2; f|x),$$

unde specificăm atât nodurile de interpolare cât și ordinea lor de multiplitate.

În continuare, aşa cum am procedat mai sus, vom căuta o formă analogă pentru polinomul de interpolare cu noduri multiple în cazul general.

Definiția 1.8.1. *Polinomul H_m , de grad cel mult m , care pe nodurile (1.2.5) verifică condițiile*

$$(1.8.12) \quad H_m^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i); \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{0, a_i - 1}$$

unde $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$ se numește polinomul de interpolare al lui Hermite al funcției f pe nodurile (1.2.5).

Ne propunem deci să găsim forma generală a acestui polinom.

Pentru aceasta construim polinoamele h_{ij} , de grad m , care verifică următoarele condiții:

$$(1.8.13) \quad \begin{aligned} h_{ij}(x_k) &= h_{ij}(x_k) = \dots = h_{ij}^{(a_k-1)}(x_k) = 0 \quad \text{dacă } i \neq k \\ h_{ij}(x_i) &= h'_{ij}(x_i) = \dots = h_{ij}^{(j-1)}(x_i) = h_{ij}^{(j+1)}(x_i) = \dots = h_{ij}^{(a_i-1)} = 0 \\ h_{ij}^{(j)}(x_i) &= 1, \quad \text{pentru } i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{0, a_i - 1}. \end{aligned}$$

Dacă h_{ij} verifică egalitățile (1.8.13) atunci polinomul:

$$(1.8.14) \quad H_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{a_i-1} f^{(j)}(x_i) h_{ij}(x),$$

verifică condițiile (1.8.12).

Din (1.8.13) rezultă că h_{ij} are următoarea formă:

$$(1.8.15) \quad \begin{aligned} h_{ij}(x) &= (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} \dots \\ &\dots (x - x_{i-1})^{a_{i-1}} (x - x_i)^j (x - x_{i+1})^{a_{i+1}} \dots (x - x_{n+1})^{a_{n+1}} q_{ij}(x), \\ i &= \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{0, a_i - 1} \end{aligned}$$

unde $q_{ij}(x)$ este polinom de grad $a_j - j - 1$, care nu are rădăcină pe $x = x_i$.

Considerăm polinoamele q_{ij} sub forma

$$(1.8.16) \quad q_{ij}(x) = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \cdots + b_{ij}^{(a_i-j-1)}(x - x_i)^{a_i-j-1}$$

unde $b_{ij}^{(0)} \neq 0$. Notăm cu ω următorul polinom:

$$(1.8.17) \quad \omega(x) = (x - x_1)^{a_1}(x - x_2)^{a_2} \cdots (x - x_{n+1})^{a_{n+1}}.$$

Polinoamele h_{ij} date de egalitățile (1.8.15), verifică relațiile:

$$(1.8.18) \quad \begin{aligned} h_{ij}(x_k) &= h'_{ij}(x_k) = \cdots = h_{ij}^{(a_k-1)}(x_k) = 0, \\ &\text{pentru } i \neq k \\ h_{ij}(x_i) &= h'_{ij}(x_i) = \cdots = h_{ij}^{(j-1)}(x_i) = 0, \\ &i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{0, a_i-1}. \end{aligned}$$

Este deci necesar să determinăm polinoamele q_{ij} astfel încât h_{ij} să verifice și ultimele condiții din (1.8.13), adică condițiile:

$$(1.8.19) \quad h_{ij}^{(j)}(x_i) = h_{ij}^{(j+1)}(x_i) = \cdots = h_{ij}^{(a_i-1)}(x_i) = 0,$$

și

$$(1.8.20) \quad h_{ij}^{(i)}(x_i) = 1, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = \overline{0, a_i-1}.$$

Pentru aceasta din (1.8.15) și (1.8.17) observăm că q_{ij} se poate pune sub forma:

$$(1.8.21) \quad q_{ij} = \frac{(x - x_i)^{a_i-j}}{\omega(x)} h_{ij}(x)$$

de unde obținem pentru coeficientul $b_{ij}^{(0)}$, următoarea expresie:

$$b_{ij}^{(0)} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \cdot \frac{h_{ij}(x)}{(x - x_i)^j},$$

și de aici avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{h_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{h_{ij}^{(j)}(x)}{j!} = \frac{h_{ij}^{(j)}(x_i)}{j!} = \frac{1}{j!}$$

și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} &= \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i} = \\ &= \frac{1}{(x_i - x_1)^{a_1}(x_i - x_2)^{a_2} \cdots (x_i - x_{i-1})^{a_{i-1}}(x_i - x_{i+1})^{a_{i+1}} \cdots (x_i - x_{n+1})^{a_{n+1}}} . \end{aligned}$$

Deci b_{ij}^0 are următoarea formă:

$$(1.8.22) \quad b_{ij}^0 = \frac{1}{j!} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i} .$$

Din (1.8.16) și (1.8.21) obținem pentru $b_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1, a_i - j - 1}$, următoarea reprezentare

$$(1.8.23) \quad b_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \cdot \frac{h_{ij}(x)}{(x - x_j)^j} \right] ,$$

dar

$$\begin{aligned} (1.8.24) \quad &\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \cdot \frac{h_{ij}(x)}{(x - x_j)^j} \right] = \\ &= \sum_{p=0}^k C_k^p \left[\frac{(x - x_1)^{a_i}}{\omega(x)} \right]^{(p)} \cdot \left[\frac{h_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)} \end{aligned}$$

unde cu C_k^p am notat numărul combinărilor de k elemente luate cîte p .

Se constată imediat că funcția:

$$\left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]^{(p)} ,$$

este continuă în $x = x_i$ și de aceea are loc egalitatea

$$(1.8.25) \quad \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]^{(p)} = \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(p)} .$$

Pentru termenul rămas vom observa că $h_{ij}(x)$ este polinom de grad cel puțin j și deci el se poate dezvolta după puterile lui $x - x_i$ astfel:

$$(1.8.26) \quad h_{ij}(x) = d_{ij}^{(0)}(x - x_i)^j + d_{ij}^{(1)}(x - x_i)^{j+1} + \cdots + d_{ij}^{(m-j)}(x - x_i)^m ,$$

de unde deducem imediat egalitatea:

$$(1.8.27) \quad \frac{h_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} = d_{ij}^{(0)} + d_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \cdots + d_{ij}^{(m-j)}(x - x_i)^{m-j} ,$$

care ne conduce la egalitățile:

$$(1.8.28) \quad \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{h_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-p)} = (k-p)! d_{ij}^{(k-p)},$$

iar pe de altă parte din (1.8.27) obținem:

$$d_{ij}^{(k-p)} = \frac{h_{ij}^{(k+j-p)}(x_i)}{(k+j-p)!}.$$

În această egalitate $k+j-p \leq a_i - 1$ și deci $d_{ij}^{(k-p)} \neq 0$ numai pentru $k=p$, adică

$$d_{ij}^{(0)} = \frac{h_{ij}^{(j)}(x_i)}{j!} = \frac{1}{j!}.$$

Astfel din (1.8.23) și (1.8.24), folosind egalitatea de mai înainte deducem:

$$b_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k! j!} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)},$$

iar pentru polinoamele h_{ij} expresia:

$$\begin{aligned} h_{ij}(x) &= \frac{1}{j!} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{a_i - k}} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \frac{1}{k!} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} (x - x_i)^k \\ i &= \overline{1, n+1}; j = 0, a_i - 1 \end{aligned}$$

de unde obținem pentru H_m , ținând cont de (1.8.20), următoarea formă:

$$H_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} \frac{f^{(j)}(x_i)}{j! k!} \left[\frac{(x - x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{a_i-j-k}}.$$

Pentru polinomul H_m vom întrebuița o notație analoagă cu cea de la (1.8.11), adică

$$H_m(x) = H(x_1; a_1, \dots, x_{n+1}; a_{n+1}; f|x|).$$

În continuare vom determina restul în formula de interpolare a lui Hermite.

Notăm cu R funcția:

$$R(f; x) = f(x) - H_m(x).$$

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.8.1. Dacă f este derivabilă până la ordinul $m + 1$ inclusiv pe intervalul (y_1, y_2) unde $y_1 = \min_{1 \leq i \leq n+1} \{x_i, x\}$ și $y_2 = \max_{1 \leq i \leq n+1} \{x_i, x\}$, $x \in E$, atunci există cel puțin un punct $c \in (y_1, y_2)$ astfel încât:

$$(1.8.29) \quad R(f; x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \omega(x),$$

$$\text{unde } \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{a_i}.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație considerăm funcția $\varphi : E \rightarrow R$

$$(1.8.30) \quad \varphi(x) = f(x) - H_m(x) - K\omega(x)$$

unde dacă luăm:

$$(1.8.31) \quad K = \frac{f(z) - H_m(z)}{\omega(z)}, \quad z \in E, z \neq x_i, i = \overline{1, n+1},$$

atunci z este un zero al lui φ .

Pe lângă aceasta, funcția φ mai verifică și următoarele condiții:

$$\varphi^{(j)}(x_i) = 0 \quad \text{pentru } i = \overline{1, n+1}, j = \overline{0, a_i - 1}$$

unde $a_1 + a_2 + \dots + a_n = m + 1$. În consecință, funcția φ , pentru valoarea lui k dată de (1.8.31), va avea $n + 2$ zerouri pe E . Aplicăm acum funcției φ lema 1.4.1 și rezultă că există cel puțin un punct $c \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $\bar{y}_1 = \min_{1 \leq i \leq n+1} \{x_i, z\}$, $y_2 = \max_{1 \leq i \leq n+1} \{x_i, z\}$ astfel încât $\varphi^{(n+1)}(x) = 0$. Din (1.8.30) obținem:

$$\varphi^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x) - K(m+1)!$$

de unde rezultă:

$$K = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!},$$

care împreună cu (1.8.31) ne conduce la

$$f(z) - H_n(z) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \omega(z).$$

În concluzie, pentru orice $x \in E$ există cel puțin un punct c cuprins în interiorul celui mai mic interval care conține punctele x_i , $i = \overline{1, n+1}$ și punctul x , astfel încât are loc egalitatea:

$$(1.8.32) \quad f(x) = H(x_1; a_1, \dots, x_{n+1}; a_{n+1}; f|x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \omega(x).$$

Observația 1.8.1. Pentru a dovedi existența și unicitatea polinomului lui Hermite pe nodurile (1.2.5) putem proceda și astfel: Considerăm numerele reale y_{ij} , $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{0, a_i - 1}$ și scriem condițiile (1.8.3) sub forma

$$(1.8.33) \quad P^{(j)}(x_i) = y_{ij} \quad i = \overline{1, n+1}, \quad j = 0, a_i - 1,$$

unde $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$. Notăm cu \mathcal{P}_m , mulțimea polinoamelor de grad cel mult m . Această mulțime formează un spațiu vectorial de dimensiune $m + 1$. Mulțimea vectorilor de forma

$$(y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1a_1-1}, y_{20}, y_{21}, \dots, y_{2a_2-1}, \dots, y_{n+1,0}, y_{n+1,1}, \dots, y_{n+1,a_{n+1}-1})$$

formează spațiul vectorial \mathbb{R}^{m+1} .

Condițiile (1.8.33) determină o aplicație liniară $\bar{H}_m : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Deoarece spațiile \mathcal{P}_m și \mathbb{R}^{m+1} sunt de dimensiune finită și $\dim(\mathcal{P}_m) = \dim(\mathbb{R}^{m+1}) = m + 1$, pentru a demonstra că \bar{H}_m este bijectivă este suficient să demonstreăm că ea este injectivă.

Aceasta revine la arăta că dacă $p \in \mathcal{P}_m$ și $\bar{H}_m(p) = 0$ atunci $p = 0$.

Într-adevăr, condițiile (1.8.33), pentru $y_{ij} = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{0, a_i - 1}$ ne asigură că polinomul p se divide în mod necesar cu polinomul ω dat de

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{a_i}.$$

Dar ω este polinom de grad $m + 1$ iar p este polinom de grad cel mult m și de aici urmează că p nu poate fi decât polinomul identic nul. Cu aceasta, existența și unicitatea polinomului lui Hermite este dovedită.

Observația 1.8.2. Cazul particular al polinomului lui Hermite când $n = 0$ se reduce la polinomul lui Taylor de grad cel mult m , adică:

$$(1.8.34) \quad H(x_1, m+1; f|x) = \\ = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \dots + \frac{f^{m+1}(x_1)}{(m+1)!}(x - x_1)^{m+1},$$

cu restul dat de relația

$$(1.8.35) \quad R(f, x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_1)^{m+1},$$

unde c se află în cel mai mic interval ce conține punctele x_1 și x .

1.9 Diferențe divizate pe noduri multiple

Considerăm nodurile de interpolare (1.2.5) și fiecărui nod x_i îi atașăm un număr natural a_i , pe care îl numim ordin de multiplicitate al lui x_i , $i = \overline{1, n+1}$.

Presupunem că f este derivabilă până la ordinul $m + 1$ pe mulțimea E .

Putem defini, de exemplu, diferența divizată de ordinul 1 pe nodul dublu x_i astfel:

$$(1.9.1) \quad [x_i, x_i; f] = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

În general

$$(1.9.2) \quad \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1; x_2, x_2, \dots, x_2; \dots; x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}; f]}_{\substack{a_1 \text{ ori} \\ a_2 \text{ ori} \\ \vdots \\ a_{n+1} \text{ ori}}} = \lim_{x_i^{(j)} \rightarrow x_i} \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}; \dots; x_i, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(a_i-1)}; \dots; x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right],$$

unde toți $x_i^{(j)}$ sunt diferenți între ei, adică $x_i^{(j)} \neq x_k^{(l)}$ pentru $i \neq k$ și $l \neq j$.

În ipotezele adoptate este ușor de văzut că are loc egalitatea

$$(1.9.3) \quad \underbrace{[x_i, x_i, \dots, x_i; f]}_{k+1 \text{ ori}} = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} \quad \text{pentru } k \leq m + 1.$$

În cele ce urmează vom arăta că în ipotezele de derivabilitate care au fost impuse asupra funcției f , limita (1.9.2) există și deci diferența divizată pe noduri multiple definită astfel are sens.

Pentru aceasta considerăm reprezentarea (1.7.4) a diferenței divizate, adică:

$$(1.9.4) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}} = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^n)}.$$

Cu notația de mai sus, egalitatea (1.9.2) revine la calculul limitei:

(1.9.5)

$$\lim_{x_i^{(i)} \rightarrow x_i} \frac{D(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f)}{D(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; x^{m+1})}$$

unde $x_i^{(j)} \neq x_k^l$, $i \neq k$ sau $j \neq l$.

Dacă înlocuim în (1.9.5), de exemplu, pe $x_1^{(1)}$ cu x_1 suntem conduși la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, și ținând cont de ipotezele făcute asupra lui f , putem aplica regula lui L'Hopital. Calculând după regulile cunoscute derivatele determinanților ce apar în (1.9.5) în raport cu $x_1^{(1)}$ și înlocuind în linia a doua pe $x_1^{(1)}$ cu x_1 , această linie, în cei doi determinanți, va avea următoarea formă:

$$0 \ 1 \ 2x_1 \ 3x_1^2 \ \cdots \ (m-1)x_1^{m-2} \ f'(x_1)$$

în determinantul de la numărător și

$$0 \ 1 \ 2x_1 \ 3x_1^2 \ \cdots \ (m-1)x_1^{m-2} \ mx_1^{m-1}$$

în determinantul de la numitor. Celelalte linii evident nu se schimbă.

Calculând derivatele de ordinul 1 în raport cu $x_1^{(2)}$ și înlocuind cu $x_1^{(2)}$ cu x_1 observăm că liniile de rang 2 și 3 din ambii determinanți sunt identice. Este deci necesar să mai aplicăm odată regula lui L'Hopital și în acest caz

după înlocuirea lui $x_1^{(2)}$ cu x_1 , linia de ordinul 3 din cei doi determinanți va arăta astfel:

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \cdot 2 \cdot x_1 \quad \cdots \quad (m-1)(m-2)x_1^{m-3} \quad f''(x_1)$$

respectiv

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \cdot 2 \cdot x_1 \quad \cdots \quad (m-1)(m-2)x_1^{m-3} \quad (m-1)m \quad x_1^{m-2}.$$

Continuând acest procedeu după $a_1 - 1$ pași vom obține pentru primele a_1 linii din cei doi determinanți următoarea formă

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{a_1-1} & x_1^{a_1} & x_1^{a_1-1} & \cdots & x_1^{m-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (a_1-1)x_1^{a_1-2} & a_1x_1^{a_1-1} & (a_1+1)x_1^{a_1} & \cdots & (m-1)x_1^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (a_1-1) & a_1!x_1 & \frac{(a_1+1)!}{2!}x_1^2 & \cdots & \frac{(m-1)!}{(m-a_1)!}x_1^{m-a_1} \end{array} \begin{array}{c} f(x_1) \\ f'(x_1) \\ \vdots \\ f^{(a_1-1)}(x_1) \end{array}$$

în determinantul de la numărator, respectiv o formă similară în determinantul de la numitor, care se obține din acesta prin înlocuirea lui $f(x)$ cu x^m . Procedeul de mai sus continuă până la epuizarea tuturor nodurilor x_i $i = \overline{1, n+1}$, cu ordinele lor de multiplicitate a_i .

Urmează acum să dovedim că determinantul obținut la numitor după aceaste transformări nu este egal cu zero.

Pentru aceasta să observăm că dacă considerăm un polinom de grad m , cu coeficienți a_0, a_1, \dots, a_m necunoscuți, adică:

$$(1.9.6) \quad P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

și cerem să se determine acest polinom astfel încât să fie verificate condițiile:

$$(1.9.7) \quad P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = \overline{1, n+1}; j = \overline{0, a_i-1},$$

atunci obținem un sistem de $m+1$ ecuații cu $m+1$ necunoscute al cărui determinant principal coincide cu determinantul obținut la numitorul fractiei (1.9.5) după toate transformările indicate mai sus. Dar sistemul (1.9.7) ne determină coeficienții polinomului lui Hermite, despre care am arătat (Observația 1.8.1), că există și este unic. De aici rezultă că coeficienții a_0, a_1, \dots, a_m din (1.9.6) se determină în mod unic cu condițiile (1.9.7) și deci este evident că determinantul în cauză este diferit de zero.

Din cele arătate mai sus rezultă imediat egalitatea (1.9.3), adică:

$$\underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1 : f]}_{k+1 \text{ ori}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (k-1)x_1^k & f'(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)! & f^{(k-1)}(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f^{(k)}(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^k \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (k-1)x_1^{k-2} & kx_1^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)! & k!x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k! \end{vmatrix}} = \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}.$$

Formula de recurență a diferențelor divizate pe noduri simple poate fi extinsă și în cazul nodurilor multiple astfel:

Din definiția diferenței divizate pe noduri multiple avem:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1]}_{a_1 \text{ ori}}; \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{a_2 \text{ ori}}; \dots; \underbrace{x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{a_{n+1} \text{ ori}}; f] = \\ & = \lim_{x_i^j \rightarrow x_i} \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, \right. \\ & \quad \left. \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right], \quad x_i^{(j)} \neq x_k^l \end{aligned}$$

dar

$$\begin{aligned} & \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right] = \\ & = \frac{1}{x_{n+1} - x_1} \left[\left[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right] \right]. \end{aligned}$$

De unde trecând la limită în egalitatea de mai sus obținem:

$$\begin{aligned}
 & \left[\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{a_1 \text{ ori}}; \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{a_2 \text{ ori}}; \dots; \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{a_{n+1} \text{ ori}}; f \right] = \\
 & = \frac{1}{x_{n+1} - x_1} \left[\left[\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{a_1-1 \text{ ori}}; \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{a_2 \text{ ori}}; \dots; \underbrace{x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{a_{n+1} \text{ ori}}; f \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \left[\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{a_1 \text{ ori}}; \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{a_2 \text{ ori}}; \dots; \underbrace{x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{a_{n+1}-1 \text{ ori}}; f \right] \right].
 \end{aligned}$$

Formula de recurență de mai sus ne poate servi ușor pentru calculul diferențelor divizate, pe noduri multiple, prin recurență.

1.10 Polinomul lui Hermite sub forma lui Newton

Să considerăm polinomul de interpolare sub forma lui Newton pe nodurile de interpolare

$$\begin{aligned}
 (1.10.1) \quad & x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots \\
 & \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}.
 \end{aligned}$$

Din (1.6.6) obținem:

$$\begin{aligned}
 (1.10.2) \quad & L \left(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, \right. \\
 & \left. \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f|x \right) = f(x_1) + \left[x_1, x_1^{(1)}; f \right] (x - x_1) + \left[x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}; f \right] (x - x_1) \cdot \\
 & \cdot (x - x_1^{(1)}) + \dots + \left[x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}; f \right] (x - x_1) (x - x_1^{(1)}) \dots (x - x_1^{(a_1-2)}) + \\
 & + \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2; f \right] (x - x_1) (x - x_1^{(1)}) \dots (x - x_1^{(a_1-1)}) + \\
 & + \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}; f \right] (x - x_1) (x - x_1^{(1)}) \dots (x - x_1^{(a_1-1)}) (x - x_2) + \dots \\
 & + \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(a_2-1)}, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}^{(1)}, \dots, \right. \\
 & \left. \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}; f \right] (x - x_1) (x - x_1^{(1)}) \dots (x - x_1^{(a_1-1)}) \dots (x - x_{n+1}) \dots \\
 & \dots (x - x_{n+1}^{(1)}) \dots (x - x_{n+1}^{(a_{n+1}-2)})
 \end{aligned}$$

cu restul:

$$(1.10.3) \quad R(x) = \left[x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(a_1-1)}, \dots, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}^{(1)}, \dots, x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)}, x; f \right]$$

$$\begin{aligned} & (x - x_1) \left(x - x_1^{(1)} \right), \dots, \left(x - x_1^{(a_1-1)} \right) \dots \\ & \dots (x - x_{n+1}) \left(x - x_{n+1}^{(1)} \right) \dots \left(x - x_{n+1}^{(a_{n+1}-1)} \right). \end{aligned}$$

Trecând la limită în egalitățile (1.10.2) și (1.10.3) când $x_i^{(j)} \rightarrow x_i$ obținem pentru polinomul lui Hermite și restul corespunzător următoarele reprezentări:

$$(1.10.4) \quad \begin{aligned} H(x_1; a_1, x_2; a_2, \dots, x_{n+1}; a_{n+1}; f|x) = \\ = f(x_1) + [x_1, x_1; f] (x - x_1) + [x_1, x_1, x_1; f] (x - x_1)^2 + \dots \\ + \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1; f]}_{a_1 \text{ ori}} (x - x_1)^{a_1-1} + \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1; x_2; f]}_{a_1 \text{ ori}} (x - x_1)^{a_1} + \\ + \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1; x_2, x_2; f]}_{a_1 \text{ ori}} (x - x_1)^{a_1} (x - x_2) + \dots \\ + \underbrace{[x_1, x_1, \dots, x_1; x_2, x_2, \dots, x_2, \dots, x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}; f]}_{a_1 \text{ ori } a_2 \text{ ori } \dots \text{ } a_{n+1} \text{ ori}} \cdot \\ \cdot (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_n)^{a_n} (x - x_{n+1})^{a_{n+1}-1} \end{aligned}$$

și

$$(1.10.5) \quad R(x) = \left[\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{a_1 \text{ ori}}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{a_2 \text{ ori}}, \dots \right. \\ \left. \dots \underbrace{x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{a_{n+1} \text{ ori}}, x; f \right] (x - x_1)^{a_1} (x - x_2)^{a_2} \dots (x - x_{n+1})^{a_{n+1}}.$$

1.11 Forma integrală a diferențelor divizate

Contribuții importante în această direcție a adus D.V. Ionescu [59], [60], folosind aşa numita metodă a funcției φ .

Pentru fixarea ideilor, considerăm nodurile de interpolare numerotate în ordine crescătoare, adică

$$(1.11.1) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

și funcția $f \in C_{[x_1, x_{n+1}]}^n$. Fie cărui interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$, îi atașăm câte o funcție φ_i , $i = 1, n$ care verifică ecuațiile diferențiale

$$(1.11.2) \quad \varphi_i^{(n)}(x) = 0, \text{ pentru orice } x \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, n}.$$

Aplicând formula de integrare prin părți în mod repetat fiecărei integrale de forma

$$(1.11.3) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) f^{(n)}(x) dx, \quad i = \overline{1, n},$$

și ținând cont de (1.11.2), obținem

$$(1.11.4) \quad \begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) f^{(n)}(x) dx &= \left[\varphi_i(x) f^{(n-1)}(x) - \varphi_i(x) f^{(n-2)}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^{n-1} \varphi_i^{(n-1)}(x) f(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Dacă adunăm membru cu membru egalitățile (1.11.4) obținem:

$$(1.11.5) \quad \int_{x_1}^{x_{n+1}} \varphi(x) f^{(n)}(x) dx = F(f),$$

unde F este o funcțională ce depinde de $f, f', \dots, f^{(n-1)}$, așa cum rezultă din (1.11.4) și $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ pentru $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$.

În continuare vom arăta că egalitățile:

$$(1.11.6) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) = x^i, \quad i = \overline{0, n-1} \\ 1 & \text{dacă } f(x) = x^n, \end{cases}$$

enunțate în Proprietatea 1.5.3. caracterizează complet diferența divizată de ordin n a funcției f , dacă ținem cont că această funcțională este și liniară (Proprietatea 1.5.1).

Într-adevăr, dacă notăm cu G o funcțională definită pe mulțimea funcțiilor f cu domeniul de definiție dat de mulțimea formată din punctele (1.11.1), atunci are loc egalitatea:

$$(1.11.7) \quad G(f) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i),$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n+1}$ și nu depind de funcția f .

Dacă scriem că funcționala G verifică egalitățile (1.11.6) obținem pentru λ_i următorul sistem:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^j &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^n &= 1\end{aligned}$$

la care dacă adăugăm relația (1.11.7) și eliminăm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ obținem:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & 0 \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n+1}^n & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \cdots & f(x_{n+1}) & G(f) \end{array} \right| = 0$$

de unde folosind (1.7.4) obținem:

$$G(f) = \frac{\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} & \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \cdots & f(x_{n+1}) & \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} & \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n+1}^n & \end{array} \right|} = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f],$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Revenim acum la funcționala F dată de (1.11.5) și observăm că pentru ca ea să reprezinte diferența divizată pe nodurile (1.11.1) este necesar și

suficient ca în valoarea acestei funcționale pe funcția f să nu figureze valoare derivatele funcției f pe noduri, adică în $F(f)$ să dispară termenii care conțin valorile $f'(x_i), f''(x_i), \dots, f^{(n-1)}(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$. Pentru aceasta este necesar și suficient ca funcțiile φ_i , $i = 1, n$, să verifice condițiile

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x_1) &= \varphi'_1(x_1) = \dots = \varphi_1^{(n-2)}(x_1) = 0 \\
 \varphi_1(x_2) &= \varphi_2(x_2) = \varphi'_1(x_2) = \varphi''_2(x_2), \dots, \varphi_1^{(n-2)}(x_2) = \varphi_2^{(n-2)}(x_2) \\
 \varphi_2(x_3) &= \varphi_3(x_3), \varphi'_2(x_2) = \varphi'_3(x_3), \dots, \varphi_2^{(n-2)}(x_3) = \varphi_3^{(n-2)}(x_3) \\
 (1.11.8) \quad &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 \varphi_{n-1}(x_n) &= \varphi_n(x_n), \varphi'_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi'_n(x_n), \dots, \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_n) = \varphi_n^{(n-2)}(x_n) \\
 \varphi_n(x_{n+1}) &= \varphi'_n(x_{n+1}) = \dots = \varphi_n^{(n-2)}(x_1) = 0.
 \end{aligned}$$

Cu aceste condiții funcționala F este liniară și se anulează pentru $f = x^i$, $i = \overline{0, n-1}$. Este necesar ca pe lângă condițiile (1.11.8) să impunem condiția suplimentară

$$(1.11.9) \quad F(x^n) = 1.$$

Arătăm în continuare că ecuațiile diferențiale (1.11.2) cu condițiile (1.11.8) și (1.11.9) ne conduc la o soluție unică.

Dacă considerăm funcțiile φ_i , $i = \overline{1, n}$ sub forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(s) &= \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
 (1.11.10) \quad \varphi_2(s) &= \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
 \dots &= \dots \\
 \varphi_n(s) &= \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_n \frac{(s-x_n)^{n-1}}{(n-1)!},
 \end{aligned}$$

atunci ele verifică ecuațiile (1.11.2) împreună cu condițiile (1.11.8) pentru orice valori ale parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Determinăm parametrii λ_i , $i = \overline{1, n}$ cu cele $n - 1$ condiții ce trebuie verificate de funcția φ_n pe punctul x_{n+1} și cu condiția (1.11.9).

Cele $n - 1$ condiții din (1.11.8) ne conduc la sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}
 (1.11.11) \quad &\lambda_1(x_{n+1} - x_1) + \lambda_2(x_{n+1} - x_2) + \dots + \lambda_n(x_{n+1} - x_n) = 0 \\
 &\lambda_1(x_{n+1} - x_1)^2 + \lambda_2(x_{n+1} - x_2)^2 + \dots + \lambda_n(x_{n+1} - x_n)^2 = 0 \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 &\lambda_1(x_{n+1} - x_1)^{n-1} + \lambda_2(x_{n+1} - x_2)^{n-1} + \dots + \lambda_n(x_{n+1} - x_n)^{n-1} = 0.
 \end{aligned}$$

Introducem un nou parametru λ_{n+1} cu condiția:

$$(1.11.12) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 0,$$

sistemul (1.11.11) devine:

$$(1.11.13) \quad \begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} &= 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^n + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 &= 0 \\ \cdot &\quad \cdot &\quad \cdot \\ \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1} + \cdots + \lambda_n x_n^{n-1} + \lambda_{n+1} x_{n+1}^{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

care împreună cu ecuația (1.11.12) ne determină parametrii λ_i , $i = \overline{1, n+1}$ în afară de un factor. Soluția sistemului format cu ecuațiile (1.11.12) și (1.11.13) este dată de egalitățile:

$$(1.11.14) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{V(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})} &= \frac{-\lambda_2}{V(x_1, x_3, \dots, x_{n+1})} = \cdots \\ &= \frac{(-1)^n \lambda_{n+1}}{V(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \alpha \end{aligned}$$

unde cu $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ am notat determinantul lui Vandermonde al numerelor y_1, y_2, \dots, y_n și α este un parametru ce se va determina cu condiția (1.11.9).

Din (1.11.10) deducem egalitățile

$$(1.11.15) \quad \varphi_i^{(n-1)}(s) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Folosind egalitățile de mai sus și condițiile (1.11.8) obținem pentru F următoarea reprezentare:

$$\begin{aligned} F(f) &= (-1)^n \alpha [f(x_1)V(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) - f(x_2)V(x_1, x_3, \dots, x_{n+1}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^n f(x_{n+1})V(x_1, x_2, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

sau

$$F(f) = \alpha \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

din care ținând cont de (1.11.9) rezultă

$$\alpha = \frac{1}{V(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})},$$

adică

$$F(f) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \\ \hline 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$$

de unde înând cont de (1.11.5) obținem:

$$(1.11.16) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \int_{x_1}^{x_{n+1}} \varphi(x) \cdot f^{(n)}(x) dx$$

unde $\varphi : [x_1, x_{n+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi_i(x)$, pentru $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$, adică restricțiile lui φ la intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ coincid cu funcțiile φ_i .

Dacă introducem notațiile

$$(x - x_i)_+ = \begin{cases} x - x_i & \text{dacă } x \geq x_i \\ 0 & \text{dacă } x < x_i, \end{cases}$$

atunci funcția φ se poate reprezenta sub forma:

$$\varphi(x) = \lambda_1 \frac{(x - x_1)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(x - x_2)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \lambda_{n+1} \frac{(x - x_{n+1})_+^{n-1}}{(n-1)!}$$

care după cum se vede nu este altceva decât funcția spline de ordin $n-1$ ce verifică condițiile (1.11.8).

Reprezentarea (1.11.16) a fost obținută a pentru prima dată de către G. Peano [27].

De asemenea, aceeași reprezentare se mai poate obține și folosind dezvoltarea tayloriană a funcției f pe punctul x_{n+1} cu restul sub forma lui Peano, pentru valorile lui f pe punctele x_i , $i = \overline{1, n}$ și reprezentarea diferenței divizate dată de (1.7.4). Acest mod de abordare al problemei aparține, după cum se afirmă în [60], lui P. J. Laurent.

Înând cont de (1.11.14) și de reprezentarea parametrului α , dată ulterior, observăm că pentru λ_i , $i = \overline{1, n+1}$ avem următoarele reprezentări:

$$\lambda_i = (-1)^{i-1} \frac{V(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Pentru proprietăți suplimentare și detalii asupra funcției φ recomandăm cititorului lucrările [59], [60]. În aceste lucrări autorul construiește toată teoria interpolării cu polinoame, pornind de la definiția diferenței divizate ca fiind o funcțională liniară ce verifică egalitățile (1.11.6) și pentru care se construiesc, așa cum am procedat mai sus, funcțiile φ_i , $i = \overline{1, n+1}$ ce determină funcția f din reprezentarea (1.11.6).

1.12 Interpolarea funcțiilor de variabilă complexă

Este evident că formal, și în cazul funcțiilor de variabilă complexă poate fi scris polinomul lui Lagrange, dar studiul restului în acest caz nu se mai poate face cu metodele pe care le-am folosit în cazul funcțiilor reale de o variabilă reală, deoarece pentru funcțiile complexe teorema lui Rolle nu mai funcționează.

Fie Γ o curbă plană simplă închisă și f o funcție de variabilă complexă definită pe Γ și în interiorul curbei Γ . Presupunem că f este analitică pe domeniul de definiție specificat. Considerăm în interiorul curbei Γ , $n + 1$ noduri de interpolare

$$(1.12.1) \quad z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, \quad z_i \neq z_j \quad \text{dacă} \quad i \neq j$$

și notăm cu $\omega(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n+1})$.

Fie P o funcție dată de relația:

$$(1.12.2) \quad P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(s) - \omega(z)}{\omega(s)(s - z)} f(s) ds$$

unde integrala din membrul drept este egală cu suma rezidurilor funcției de sub integrală corespunzătoare fiecărui punct din sistemul (1.12.1). Dar rezidul pentru un punct arbitrar z_k din (1.12.1) este dat de egalitatea:

$$\lim_{s \rightarrow z_k} \frac{\omega(s) - \omega(z)}{\omega(s)(s - z)} f(s)(s - z_k) = f(z_k) \frac{\omega(z)}{\omega'(z_k)(z - z_k)},$$

adică

$$(1.12.3) \quad P(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n+1} f(z_k) \frac{\omega(z)}{\omega'(z_k)(z - z_k)} = L(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; f|z).$$

Dacă scriem egalitatea (1.12.2) sub forma:

$$L(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; f|z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{\omega(s)(s - z)} ds$$

și dacă ținem cont de formula lui Cauchy atunci obținem egalitatea

$$f(z) = L(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}; f|z) + \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{\omega(s)(s-z)} ds.$$

Astfel restul în formula de interpolare a lui Lagrange este dat în acest caz de egalitatea

$$R(z) = \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{\omega(s)(s-z)} ds.$$

REFERINȚE

Pentru redactarea acestui capitol am folosit lucrările: [27], [39], [42], [59], [60], [86], [88], [115], [126], [127] și [129].

Capitolul 2

Derivate de ordin superior ale funcțiilor inverse și funcțiilor compuse

În acest capitol vom aborda problema calculului derivatelor de ordin superior pentru funcții compuse și funcții inverse.

Forma generală a acestor formule ne va fi necesară, în capitolele următoare, la studiul metodelor de iterație de tip interpolator.

2.1 Derivatele funcțiilor compuse

Fie I un interval al axei reale și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Notăm cu K mulțimea valorilor funcției f , adică $K = f(I)$. Fie $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ și funcția $h = g \circ f$, unde $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = g(f(x))$ pentru orice $x \in I$.

Funcția h este funcția compusă a celor 2 funcții f și g . Fie $x_0 \in I$ un punct din interiorul intervalului I și $n \in \mathbb{N}$ un număr natural. Asupra funcțiilor f și g vom face următoarele ipoteze:

- (i) *funcția f este derivabilă, până la ordinul n inclusiv, pe punctul x_0 ;*
- (ii) *funcția g este derivabilă, până la ordinul n inclusiv, pe punctul $y_0 = f(x_0)$.*

Forma generală a derivatei de ordin superior pentru funcția h pe punctul x_0 este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.1.1. *Dacă funcțiile f și g verifică ipotezele (i) și (ii), atunci funcția h admite derivate de orice ordin $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, pe punctul x_0 și*

derivata de ordin k este dată de relația:

$$(2.1.1) \quad h^{(k)}(x_0) = \sum_{i=1}^k g^{(i)}(f(x_0)) u_k^{(i)}(x_0),$$

unde coeficienții $u_k^{(i)}(x_0)$, $i = 1, 2, \dots, k$ sunt dați de următoarele relații:

$$(2.1.2) \quad u_k^{(i)} = \sum \frac{k!}{(a_1)!(1!)^{a_1} \cdot (a_2)!(2!)^{a_2} \cdots (a_k)!(k!)^{a_k}} \cdot \\ \cdot [f'(x_0)]^{a_1} [f''(x_0)]^{a_2} \cdots (f^{(k)}(x_0))^{a_k}$$

unde suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor întregi nenegative ale sistemului

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_k &= i \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k &= k. \end{cases}$$

Demonstrație. Vom proceda prin inducție completă atât în raport cu i cât și în raport cu k .

Pentru $k = 1$ avem:

$$(2.1.4) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

În acest caz sistemul (2.1.3) are numai soluția $a_1 = 1$ deoarece în acest caz avem $i = k = 1$. Din (2.1.1) pentru $k = 1$ obținem $u_1^{(1)} = \frac{1}{(1!) \cdot (1!)} f'(x_0) = f'(x_0)$, adică (2.1.1) este adevărată pentru $k = 1$.

Presupunem că formula (2.1.1) este adevărată, unde coeficienții $\mu_k^{(i)}$ sunt dați de (2.1.2). Derivata de ordin $k + 1$ a funcției h se obține din (2.1.1) astfel:

$$(2.1.5) \quad \begin{aligned} h^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^k \left\{ g^{(i+1)}(f(x_0)) \mu_k^{(i)}(x_0) f'(x_0) + g^{(i)}(f(x_0)) [\mu_k^{(i)}(x_0)]' \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} g^{(i)}(f(x_0)) \mu_{k+1}^{(i)} \end{aligned}$$

unde coeficienții $\mu_{k+1}^{(i)}$ verifică relațiile:

$$(2.1.6) \quad \begin{cases} \mu_{k+1}^{(i)}(x_0) &= \mu_k^{(i-1)}(x_0) f'(x_0) + [\mu_k^{(i)}(x_0)]', \quad i = 2, 3, \dots, k; \\ \mu_{k+1}^{(1)}(x_0) &= [\mu_k^{(1)}(x_0)]'; \\ \mu_{k+1}^{(k+1)}(x_0) &= \mu_k^{(k)}(x_0) f'(x_0). \end{cases}$$

Pentru $i = 1$ sistemul (2.1.3) are soluția unică $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$, $a_k = 1$ și deci $\mu_k^{(1)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ și deci din (2.1.6) avem $\mu_{k+1}^{(1)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$.

Tot din sistemul (2.1.3) pentru $i = k$ obținem $a_1 = k$ $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$ și deci $\mu_k^{(k)}(x_0) = [f'(x_0)]^k$ și dacă folosim (2.1.6) avem: $\mu_{k+1}^{(k+1)} = [f'(x_0)]^{k+1}$.

Din cele arătate mai sus, este clar că primul și ultimul din coeficienți dați de (2.1.2) au forma indicată. Ne folosim acum de prima relație din (2.1.6) pentru a demonstra valabilitatea relațiilor ce ne dau coeficienții intermediari.

Trebuie deci să dovedim că, coeficienții $\mu_{k+1}^{(i)}$, $i = \overline{2, k}$ au forma corespunzătoare ce rezultă din (2.1.2) pentru $k + 1$. Din formulele de recurență (2.1.6) avem:

$$(2.1.7) \quad f'(x_0)\mu_k^{(i-1)}(x_0) = \sum \frac{k!}{(a_1)!(1!)^{a_1} \dots (a_k)!(k!)^k} [f'(x_0)]^{b_1} [f''(x_0)]^{b_2} \dots [f^{(k)}(x_0)]^{b_k},$$

unde $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2, \dots, b_k = a_k$ și a_1, a_2, \dots, a_k verifică sistemul

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k &= i - 1; \\ a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k &= k. \end{aligned}$$

Este clar că dacă (2.1.8) este verificat de a_1, a_2, \dots, a_k , atunci b_1, b_2, \dots, b_k verifică sistemul

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_k &= i; \\ b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k &= k + 1. \end{aligned}$$

În cazul în care $b_{k+1} = 0$ atunci avem

$$(2.1.9) \quad f'(x_0)\mu_k^{(i-1)}(x_0) = \sum \frac{k!}{(a_1)!(1!)^{a_1} \dots (a_k)!(k!)^k} \cdot [f'(x_0)]^{b_1} [f''(x_0)]^{b_2} \dots [f^{(k)}(x_0)]^{b_k} [f^{(k+1)}(x_0)]^{b_{k+1}}$$

unde b_1, b_2, \dots, b_{k+1} verifică sistemul:

$$(2.1.10) \quad \begin{cases} b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} &= i; \\ b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k + (k+1)b_{k+1} &= k + 1 \end{cases}$$

Observăm că în sistemul (2.1.10) b_{k+1} nu poate lua decât valorile 0 sau 1. Dar pentru $b_{k+1} = 1$, rezultă $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$ și deci în mod necesar

i trebuie să fie dat de $i = k + 1$, adică singurul sistem verificat de $b_{k+1} = 1$ este

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_k + b_{k+1} &= k + 1; \\ b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k + (k+1)b_{k+1} &= k + 1. \end{aligned}$$

În acest caz coeficientul corespunzător $\mu_{k+1}^{(k+1)}$ a fost deja stabilit la începutul rationamentului nostru. Așa deci (2.1.9) are loc și pentru $k + 1$.

Pentru cel de-al doilea termen din dreapta relației (2.1.6) avem:

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} [\mu_k^{(i)}(x_0)]' &= \sum \frac{k!}{a_1!(1!)^{a_1} \dots a_k!(k!)^{a_k}} \sum_{j=1}^k a_j [f'(x_0)]^{a_1} \dots \\ &\dots [f^{(j)}(x_0)]^{a_j-1} \cdot [f^{(j+1)}(x_0)]^{a_{j+1}+1} \dots [f^{(k)}(x_0)]^{a_k} \end{aligned}$$

unde prima sumă se extinde asupra tuturor soluțiilor în numere întregi nenegative ale sistemului

$$(2.1.12) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_k &= i; \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k &= k. \end{cases}$$

Fie (a_1, a_2, \dots, a_k) o soluție a sistemului (2.1.12). Se observă că dacă unul din numerele a_i , $i = \overline{1, k}$ este zero, atunci termenul corespunzător din suma indexată de la (2.1.11) este zero și deci nu intervine nici o modificare.

Dacă (a_1, a_2, \dots, a_k) este soluție a sistemului (2.1.12), atunci pentru $a_{k+1} = 0$ avem

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= i \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k + (k+1)a_{k+1} &= k. \end{aligned}$$

Se constată cu ușurință că soluțiile:

$$(2.1.13) \quad \begin{aligned} b_1 &= a_1 - 1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3, \dots, b_k = a_k, b_{k+1} = a_{k+1}; \\ b_1 &= a_1, b_2 = a_2 - 1, b_3 = a_3 + 1, \dots, b_k = a_k, b_{k+1} = a_{k+1}; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_1 &= a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{i-1} = a_{i-1}, b_i = a_i - 1, b_{i+1} = \\ &= a_{i+1} + 1, \dots, b_k = a_k, b_{k+1} = a_{k+1} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_1 &= a_1, b_2 = a_2, \dots, b_k = a_k - 1, b_{k+1} = a_{k+1} + 1 \end{aligned}$$

verifică sistemul

$$(2.1.14) \quad \begin{cases} b_1 + b_2 + \cdots + b_k + b_{k+1} &= i \\ b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k + (k+1)b_{k+1} &= k + 1. \end{cases}$$

Din (2.1.14), (2.1.6) și (2.1.11), schimbând ordinea de însumare în (2.1.11), obținem coeficientul $\mu_{k+1}^{(i)}(x_0)$ sub forma

$$(2.1.15) \quad \mu_{k+1}^{(i)}(x_0) = \sum \frac{(k+1)!}{(a_1)!(1!)^{a_1} \dots a_{k+1}![(k+1)!]^{a_{k+1}}} [f'(x_0)]^{a_1} [f''(x_0)]^{a_2} \dots [f^{k+1}(x_0)]^{a_{k+1}}$$

unde suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} &= i \\ a_1 + 2a_2 + \dots + (k+1)a_{k+1} &= k+1 \end{cases}$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

2.2 Cazuri particulare

În cele ce urmează vom aplica formula (2.1.1) pentru a obține câteva derive succesive ale funcției compuse.

1. $k = 1$. În acest caz sistemul (2.1.3) va avea forma

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

și deci suma (2.1.2) va avea un singur termen, adică

$$\mu_1^{(1)}(x_0) = \frac{1!}{1!(1!)^1} f'(x_0) = f'(x_0)$$

de unde obținem formula binecunoscută:

$$(2.2.2) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

2. $k = 2$. În acest caz avem următoarele două sisteme

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1; \\ a_1 + 2a_2 &= 2, \end{aligned}$$

și

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2; \\ a_1 + 2a_2 &= 2. \end{aligned}$$

Sistemul (2.1.3) are singura soluție $a_1 = 0, a_2 = 1$, iar sistemul (2.2.4) are soluția unică $a_1 = 2, a_2 = 0$.

Având în vedere cele 2 soluții și (2.1.2) obținem

$$\begin{aligned}\mu_2^{(1)}(x_0) &= \frac{2!}{1!(2!)^1} f''(x_0) = f''(x_0), \\ \mu_2^{(2)}(x_0) &= \frac{2!}{2!(1!)^2} [f'(x_0)]^2 = f'^2(x_0)\end{aligned}$$

și de aici, ținând cont de (2.1.1) avem:

$$(2.2.5) \quad h''(x_0) = g'(f(x_0)) f''(x_0) + g''(f(x_0)) [f'(x_0)]^2.$$

3. $k = 3$. În acest caz trebuie să determinăm soluțiile următoarelor 3 sisteme:

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= 1; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 3,\end{aligned}$$

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= 2; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 3,\end{aligned}$$

și

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= 3; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 3.\end{aligned}$$

Este ușor de văzut că sistemul (2.2.6) are singura soluție $a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$. La fel sistemul (2.2.7) admite numai soluția $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 0$. În sfârșit, sistemul (2.2.8) are soluția unică $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 0$.

Din acestea, ținând cont de (2.1.2) obținem:

$$\begin{aligned}\mu_3^{(1)}(x_0) &= \frac{3!}{(0!)(1!)^0 \cdot (0!)(2!)^0 \cdot (1!)(3!)^1} f'''(x_0) = f'''(x_0) \\ \mu_3^{(2)}(x_0) &= \frac{3!}{(1!)(1!)^1 \cdot (2!)^1 (0!)(3!)^0} = 3f'(x_0)f''(x_0); \\ \mu_3^{(3)}(x_0) &= \frac{3!}{(3!)(1!)^3 \cdot (0!)(2!)^0 (0!)(3!)^0} [f'(x_0)]^3.\end{aligned}$$

Folosind acești coeficienți avem:

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned}h'''(x_0) &= \\ &= g'(f(x_0)) f'''(x_0) + 3g''(f(x_0)) f''(x_0)f'(x_0) + g'''[f(x_0)][f'(x_0)]^3.\end{aligned}$$

4. $k = 4$. Considerăm următoarele sisteme:

$$(2.2.10) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 &= 4, \end{aligned}$$

$$(2.2.11) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 &= 4, \end{aligned}$$

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 3; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 &= 4 \end{aligned}$$

și

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 4; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 &= 4. \end{aligned}$$

Pentru sistemul (2.2.10) avem soluția unică $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ și $a_4 = 1$. Sistemul (2.2.11) are 2 soluții și anume: $a_2 = a_4 = 0$, $a_1 = a_3 = 1$ și încă $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_2 = 2$. Sistemul (2.2.12) are soluția unică $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$. În sfârșit, (2.2.13) are de asemenea o singură soluție $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_1 = 4$. Coeficienții $\mu_4^{(i)}(x_0)$, $i = \overline{1,4}$, corespunzători sunt dați de următoarele relații:

$$\begin{aligned} \mu_4^{(1)}(x_0) &= f^{(4)}(x_0); \\ \mu_4^{(2)}(x_0) &= 4f'(x_0)f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2; \\ \mu_4^{(3)}(x_0) &= 6[f'(x_0)]^2f''(x_0); \\ \mu_4^{(4)}(x_0) &= [f'(x_0)]^4. \end{aligned}$$

Derivata de ordin 4 a funcției h va avea forma:

$$(2.2.14) \quad \begin{aligned} h^{(k)}(x_0) &= g'(f(x_0))f^{(4)}(x_0) + \\ &+ g''(f(x_0))\left\{4f'(x_0)f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2\right\} + \\ &+ 6g'''(f(x_0))[f'(x_0)]^2f''(x_0) + g^{(4)}(f(x_0))[f'(x_0)]^4. \end{aligned}$$

5. $k = 5$. În acest caz trebuie rezolvate următoarele sisteme:

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 1; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 5, \end{aligned}$$

$$(2.2.16) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 2; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 5, \end{aligned}$$

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 3; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 5, \end{aligned}$$

$$(2.2.18) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 4; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 5 \end{aligned}$$

și

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 5; \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 5. \end{aligned}$$

Pentru sistemul (2.2.15) se constată ușor că $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ și $a_5 = 1$ este singura soluție. Sistemul (2.2.16) are două soluții și anume:

- a) $a_1 = a_4 = a_5 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$ și
- b) $a_2 = a_3 = a_5 = 0, a_4 = a_1 = 1$.

De asemenea sistemul (2.2.17) are tot 2 soluții:

- a) $a_2 = a_4 = a_5 = 0, a_1 = 2, a_3 = 1$ și
- b) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

Pentru (2.2.18) avem soluția unică $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

La fel pentru (2.2.19) avem soluție unică $a_5 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ și $a_1 = 1$. Suntem astfel conduși la următorii coeficienți:

$$\begin{aligned} \mu_5^{(1)}(x_0) &= f^{(5)}(x_0); \\ \mu_5^{(2)}(x_0) &= 10f''(x_0)f'''(x_0) + 5f'(x_0)f^{(4)}(x_0); \\ \mu_5^{(3)}(x_0) &= 10[f'(x_0)]^2f'''(x_0) + 15f'(x_0)[f''(x_0)]^2; \\ \mu_5^{(4)}(x) &= 10[f'(x_0)]^3f''(x_0); \\ \mu_5^{(5)}(x_0) &= [f'(x_0)]^5. \end{aligned}$$

Folosind coeficienții de mai sus, obținem pentru $h^{(5)}(x_0)$ următoarea relație:

$$(2.2.20) \quad \begin{aligned} h^{(5)}(x_0) &= g'(f(x_0))f^{(5)}(x_0) + \\ &+ g''(f(x_0))\left\{10f''(x_0)f'''(x_0) + 5f'(x_0)f^{(4)}(x_0)\right\} + \\ &+ g'''(f(x_0))\left\{10[f'(x_0)]^2f'''(x_0) + 15f'(x_0)[f''(x_0)]^2\right\} + \\ &+ 10g^{(4)}(f(x_0))[f'(x_0)]^3f''(x_0) + g^{(5)}(f(x_0))[f'(x_0)]^5. \end{aligned}$$

Desigur, pe măsură ce ordinul k al derivatei funcției h crește, relațiile corepunzătoare devin din ce în ce mai complicate. Din acest motiv ne oprim aici cu analiza cazurilor particulare ale Teoremei 2.1.1 și în continuare vom analiza relațiile obținute, pentru cazul $g = f^{-1}$, adică g este inversa funcției f .

Fie $V = V_{x_0}$ o vecinătate a lui x_0 . Presupunem că funcția $f : V \rightarrow U$, $V \subset \mathbb{R}$, unde $U = f(V)$ este bijectivă, deci există $f^{-1}(y)$ pentru orice $y \in U$. În acest caz $h(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ pentru orice $x \in V$.

Relațiile (2.2.2), (2.2.5), (2.2.9), (2.2.14), (2.2.20) și cele care se obțin pentru $k \geq 6$ împreună cu relația (2.1.1) ne dă posibilitatea ca în anumite ipoteze să obținem, din aproape în aproape, succesiv derivatele funcției inverse f^{-1} .

Din relațiile specificate mai sus avem:

$$\begin{aligned}
 & [f^{-1}(y_0)]' f'(x_0) = 1, \quad \text{unde } y_0 = f(x_0) \\
 & [f^{-1}(y_0)]' f''(x_0) + [f^{-1}(y_0)]'' [f'(x_0)]^2 = 0 \\
 & [f^{-1}(y_0)]' f'''(x_0) + 3[f^{-1}(y_0)]'' f''(x_0) f'(x_0) + [f^{-1}(y_0)]''' [f'(x_0)]^3 = 0 \\
 (2.2.21) \quad & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \sum_{i=1}^k [f^{-1}(y_0)]^{(i)} \mu_k^{(i)}(x_0) = 0,
 \end{aligned}$$

unde $\mu_k^{(i)}(x_0)$ sunt dați de (2.2.2). Așa cum rezultă din demonstrația Teoremei 2.1.1, coeficientul derivatei de ordin k a funcției f^{-1} va fi $[f'(x_0)]^{(k)}$ și deci în ipoteza $f'(x_0) \neq 0$ din (2.2.21) obținem succesiv:

$$(2.2.22) \quad [f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)};$$

$$(2.2.23) \quad [f^{-1}(y_0)]'' = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3};$$

$$(2.2.24) \quad [f^{-1}(y_0)]''' = -\frac{f'''(x_0)f'(x_0) - 3[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^5}.$$

Este acum clar că din (2.2.21) putem obține derivatele de orice ordin ale funcției f^{-1} .

2.3 Derivatele funcției inverse

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Considerăm $x_0 \in I$, x_0 punct interior al lui I . Notăm cu $V = V_{x_0}$ o vecinătate a lui x_0 , $V \subset I$. Presupunem că restricția funcției f la V admite o funcție inversă definită pe $U = f(V)$.

Fie $\varphi = f|_V$, atunci există $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ și $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ pentru orice $x \in V$.

În cele ce urmează, vom nota cu $y_0 = \varphi(x_0)$ și cu $y_0^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_0)$, $n = 1, 2, \dots$,

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 2.3.1. *Dacă funcția f verifică condițiile*

- i. restricția φ a lui f la V este bijectivă;
- ii. f admite derivate pe punctul x_0 până la ordinul $n \in \mathbb{N}$, inclusiv;
- iii. $f'(x_0) \neq 0$,

atunci funcția $f^{-1} = \varphi^{-1}$ admite derivate, pe punctele $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ succesive, până la ordinul n , inclusiv și au loc relațiile:

(2.3.1)

$$[\varphi^{-1}(y_0)]^{(k)} = \sum \frac{(2k-2-i_1)!(-1)^{k-1+i_1}}{i_2!i_3!\dots i_x![y_0']^{2k-1}} \cdot \left(\frac{y_0'}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{y_0''}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{y_0^{(k)}}{k!}\right)^{i_k},$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

unde suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor, în numere întregi și nenegative, ale sistemului

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (k-1)i_k &= k-1; \\ i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_k + i_1 &= k-1. \end{aligned}$$

Demonstratie. Notăm cu $P_k = P(y_0', y_0'', \dots, y_0^{(k)})$ un polinom ce depinde de variabilele $y_0^{(i)}$, $i = \overline{1, k}$.

Arătăm prin inducție că

$$(2.3.3) \quad [\varphi^{-1}(y_0)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{P_n}{[y_0']^{2n-1}}.$$

Într-adevăr pentru $n = 1$ avem:

$$[\varphi^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{y_0'}, \quad \text{adică} \quad P_1 = 1.$$

Presupunem că (2.3.3) are loc pentru $n = k$, adică există polinomul P_k astfel încât

$$(2.3.4) \quad [\varphi(y_0)]^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{P_k}{[y'_0]^{2k-1}}$$

Din (2.3.4), derivând în raport cu y , obținem:

$$(2.3.5) \quad [\varphi^{-1}(y_0)]^{(k+1)} = (-1)^{k-1} \frac{P'_k(y'_0)^{2k-1} - (2k-1)P_k(y'_0)^{2k-2}y''_0}{(y'_0)^{4k-2}} \cdot \frac{1}{y'_0} = \\ = (-1)^k \cdot \frac{(2k-1)P_k y'_0 y''_0 - (y'_0)^2 P'_k}{(y'_0)^{2k+2}} = (-1)^k \frac{P_{k+1}}{(y'_0)^{2k+1}}$$

de unde rezultă că polinoamele P_k verifică relația de recurență

$$(2.3.6) \quad P_{k+1} = (2k-1)P_k y''_0 - y'_0 P'_k, \quad P_1 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fie acum P_k sub următoarea formă

$$(2.3.7) \quad P_k = \sum A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) (y'_0)^{i_1}, (y''_0)^{i_2} \dots (y_0^{(k)})^{i_k}.$$

Relația (2.3.6) ne dă posibilitatea să observăm că pentru $k \geq 2$, P_k nu are decât un singur termen ce conține pe $y_0^{(k)}$ și acest termen este $(-1)^k (y'_0)^{k-2} y_0^{(k)}$. Înținând cont de această observație, în ceea ce privește coeficienții A_k , avem două posibilități și anume $i_k = 1$ sau $i_k = 0$.

Dacă $i_k = 1$ atunci $A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) = A_k(k-2, 0, 0, \dots, 0, 1) = (-1)^k$. Pentru $i_k = 0$ avem $A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) = A_k(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, 0)$.

Ne propunem, în continuare, să stabilim o formulă de recurență care să fie verificată de coeficienții A_k , $k = 1, 2, \dots$. Observăm mai întâi că dacă unul din indici (i_1, i_2, \dots, i_k) este negativ, atunci trebuie să considerăm coeficientul $A_k(i_1, i_2, \dots, i_k)$, corespunzător, egal cu 0.

Formula de recurență (2.3.6) ne conduce ușor la următoarele afirmații:

Termenul din (2.3.7), ce conține produsul $(y'_0)^{i_1} (y''_0)^{i_2} \dots (y_0^{(k-1)})^{i_{k-1}}$.

$(y_0^{(k)})^{i_k}$ se obține prin una din următoarele operații. Înmulțind cu $(2k-3)y''_0$ termenul

$$A_{k-1}(i_1, i_2 - 1, i_3, \dots, i_{k-1})(y'_0)^{i_1} \cdot (y''_0)^{i_2-1} \dots (y_0^{(k-1)})^{i_{k-1}}$$

sau înmulțind cu $-y'_0$ derivatele termenilor care corespund următorului sir de multimi ordonate de indici

$$(i_1, i_2 - 1, i_3, \dots, i_{k-1}); (i_1 - 1, i_2 + 1, i_3 - 1, i_4, \dots, i_{k-1}); \\ (i_1 - 1, i_2, i_3 + 1, i_4 - 1, \dots, i_{k-1}); \dots; (i_1 - 1, i_2, i_3, \dots, i_{k-2} + 1, i_{k-1} - 1)$$

și deci are loc următoarea formulă de recurență

$$(2.3.8) \quad \begin{aligned} A_k(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, 0) &= \\ &= (2k - 3 - i_1)A_{k-1}(i_1, i_2 - 1, i_3, \dots, i_{k-1}) - \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k-2} (i_j + 1)A_{k-1}(i_1 - 1, i_2, \dots, i_j + 1, i_{j+1} - 1, \dots, i_{k-1}) \end{aligned}$$

Pentru $i_k = 1$ are loc relația

$$(2.3.9) \quad A_k(k - 2, 0; 0, \dots, 0, 1) = -A_{k-1}(k - 3, 0, 0, \dots, 1).$$

Pe mai departe, notăm cu Z_k , ($k \geq 2$) mulțimea sirurilor finite de numere întregi nenegative de forma (i_1, i_2, \dots, i_k) care verifică sistemul:

$$\sum_{j=2}^k (j - 1)i_j = k - 1; \quad i_1 = (k - 1) - \sum_{j=2}^k i_j.$$

Vom arăta că suma din (2.3.7) se extinde asupra mulțimii Z_k .

Procedăm prin inducție completă și anume: se verifică fără dificultate prin calcul că proprietatea are loc pentru $k = 1$ și $k = 2$. Presupunem că ea are loc pentru $k = s$, $s \geq 2$ și arătăm că este adevărată și pentru $k = s + 1$.

Observăm că pentru a obține polinomul P_{s+1} din P_s , conform (2.3.6), se fac următoarele operații:

a) Se înmulțește P_s cu $(2s - 1)y''$ și aceasta înseamnă că exponentul i_2 se mărește cu o unitate, iar restul exponenților nu se schimbă. În continuare avem:

$$(i_2 + 1) + \sum_{j=3}^s (j - 1)i_j = 1 + \sum_{j=2}^s (j - 1)i_j = 1 + s - 1 = s$$

și

$$s - \left(i_2 + 1 + \sum_{j=3}^s \right) = s - 1 - \sum_{j=2}^s i_j = i_1.$$

b) Din regula de calcul a derivatei lui P_s rezultă că trebuie să schimbăm pe i_p cu $i_p - 1$ și i_{p+1} cu $i_{p+1} + 1$ și apoi termenul obținut se înmulțește cu $-y_0''$, pentru fiecare $p = 1, 2, \dots, s - 1$. În acest caz, pentru prima relație avem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p-1} (j - 1)i_j + (p - 1)(i_p - 1) + p(i_{p+1} + 1) + \sum_{j=p+2}^s (j - 1)i_j &= \\ &= \sum_{j=2}^s (j - 1)i_j - p + 1 + p = s - 1 + 1 = s. \end{aligned}$$

iar pentru cea de-a doua relație rezultă:

$$s - \sum_{j=2}^{p-1} i_j - (i_p - 1) - (i_{p+1} + 1) - \sum_{j=p+2}^s i_j = s - \sum_{j=2}^s i_j = i_1 + 1.$$

Din raționamentele de mai sus rezultă că, dacă pentru P_s suma corespunzătoare se extinde asupra tuturor soluțiilor ce fac parte din Z_s , atunci pentru P_{s+1} suma se extinde asupra tuturor soluțiilor ce fac parte din Z_{s+1} .

În continuare vom demonstra pentru coeficienții A_k următoarea relație

$$(2.3.10) \quad A_k(i_1, i_2, \dots, i_k) = \frac{(2k - 2 - i_1)(-1)^{i_1}}{i_2! i_3! \dots i_k!} \cdot \frac{1}{(1!)^{i_1} (2!)^{i_2} \dots (k!)^{i_k}}.$$

Este ușor de văzut că (2.3.10) este adevărată pentru $k = 1$ și $k = 2$. Dacă $i_k = 1$ atunci avem:

$$A_k(k - 2, 0, 0, \dots, 0, 1) = (-1)^k.$$

În sfârșit, dacă $i_k = 0$, din ipoteza că (2.3.10) are loc pentru $k = s - 1$, ținând cont de formula de recurență (2.3.8), avem:

$$\begin{aligned} A_s(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}, 0) &= (2s - 3 - i_1) A_{s-1}(i_1, i_2 - 1, i_3, \dots, i_{s-1}) - \\ &\quad - \sum_{j=2}^{s-2} (i_j + 1) A_{s-1}(i_1 - 1, i_2, \dots, i_j + 1, i_{j+1}, \dots, i_{s-1}) = \\ &= (2s - 3 - i_1) \frac{(2s - 4 - i_1)! (-1)^{i_1} \cdot i_2 \cdot 2}{i_2! i_3! \dots i_{s-1}! (2!)^{i_2} \dots [(s-1)!]^{i_{s-1}}} - \\ &\quad - \sum_{j=2}^{s-1} (i_j + 1) \frac{(2s - 4 - i_1 + 1)! (-1)^{i_1-1} i_{j+1} (j+1)!}{i_2! i_3! \dots i_{s-1}! (2!)^{i_2} \dots [(s-1)!]^{i_{s-1}} (i_{j+1}) j!} = \\ &= \frac{(2s - 3 - i_1)! (-1)^{i_1}}{i_2! i_3! \dots i_{s-1}! (2!)^{i_2} \dots [(s-1)!]^{i_{s-1}}} \sum_{j=2}^{s-1} j i_j \end{aligned}$$

dar

$$\sum_{j=2}^n i_j \cdot j = 2s - 2 - i_1$$

adică avem

$$A_s(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}, 0) = \frac{(2s - 2 - i_1)! (-1)^{i_1}}{i_2! i_3! \dots i_{s-1}! (i_s)! (2!)^{i_2} \cdot (3!)^{i_3} \dots [(s-1)!]^{i_{s-1}} s!}$$

unde evident $i_s = 0$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

2.4 Cazuri particulare

Ca și în paragraful 2.2 vom analiza și aici câteva cazuri particulare ale formulei (2.3.1), pentru diverse valori ale ordinului k de derivare.

1. $k = 2$. În acest caz, sistemul (2.3.2) are forma

$$\begin{aligned} i_2 &= 1 \\ i_1 + i_2 &= 1 \end{aligned}$$

adică $i_1 = 0$ și $i_2 = 1$ este unica soluție. Din (2.3.1) obținem

$$(2.4.1) \quad [\varphi^{-1}(y_0)]'' = -\frac{y''}{[y]^3}$$

2. $k = 3$. Sistemul (2.3.2) are forma:

$$\begin{aligned} i_2 + 2i_3 &= 2 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 2 \end{aligned}$$

cu soluțiile $i_1 = 1$, $i_3 = 1$ și $i_2 = 0$ sau $i_1 = 0$, $i_2 = 2$, $i_3 = 0$.

De aici obținem

$$(2.4.2) \quad [\varphi^{-1}(y_0)]''' = -\frac{y'''y'_0 - 3[y''_0]^2}{[y'_0]^5}.$$

3. $k = 4$. În acest caz rezultă sistemul

$$\begin{aligned} i_2 + 2i_3 + 3i_4 &= 3 \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 &= 3 \end{aligned}$$

Cele 3 soluții ale sistemului de mai sus se pot aranja în următorul tabel:

i_1	i_2	i_3	i_4
2	0	0	1
1	1	1	0
0	3	0	0

De aici urmează:

$$(2.4.3) \quad [\varphi^{-1}(y_0)]^{(4)} = \frac{-[y'_0]^2 \cdot y_0^{(4)} + 10y'_0 y''_0 y'''_0 - 15[y''_0]^3}{[y'_0]^7}$$

În continuare vom mai analiza soluțiile sistemului (2.3.2) pentru cazurile $k = 5$ și $k = 6$, lăsând pe seama cititorului să deducă relațiile corespunzătoare ce dău formulele de calcul pentru derivele de ordinele 5 și 6 ale funcției inverse.

Pentru $k = 5$ sistemul:

$$i_2 + 2i_3 + 3i_4 + 4i_5 = 4$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 4$$

are soluțiile cuprinse în tabelul ce urmează

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
0	4	0	0	0
1	2	1	0	0
2	1	0	1	0
2	0	2	0	0
3	0	0	0	1

În sfârșit pentru $k = 6$ avem sistemul:

$$i_2 + 2i_3 + 3i_4 + 4i_5 + 5i_6 = 5$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = 5$$

cu soluțiile

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
0	5	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0
2	2	0	1	0	0
2	1	2	0	0	0
3	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1

Pe mai departe, pentru $k \geq 7$, se observă că formula (2.3.1) devine din ce în ce mai complicată.

REFERINȚE

În redactarea noțiunilor conținute în acest capitol am folosit lucrările [88], [102], [115] și [146].

Capitolul 3

Derivarea și integrarea numerică

3.1 Problema derivării numerice

Prin derivare numerică vom înțelege aproximarea valorilor derivatei f' prin valorile derivatei unei funcții de interpolare φ de forma (1.3.4), asociată funcției f . Derivând oricare din reprezentările funcției de interpolare, se obține o formulă de derivare numerică.

Presupunând că sunt îndeplinite toate condițiile din Teoremele 1.3.2 și 1.3.3, în cele ce urmează vom folosi pentru f o formulă de aproximare dată în capitolul 1, prin relația (1.3.12a):

$$(3.1.1) \quad y(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) + \int_a^x K(x, s) \psi(s) ds, \quad \text{unde } a \in E$$

care verifică ecuația $L_{n+1}[y] = \psi(x)$.

Teorema 3.1.1. *Fie $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ un sistem interpolator, ψ_i , $i = \overline{0, n}$ sunt combinații liniare ale funcțiilor φ_i și φ funcția interpolator dată de (1.3.4), atunci pentru orice x avem*

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^n \psi_i^{(k)}(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds$$

unde funcția $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de (1.3.9).

Demonstratie. Afirmația rezultă plecând de la relațiile (1.3.12a) și (1.3.12b)

$$(3.1.2) \quad f(x) = \varphi(x) + \sum_{i=0}^n \psi_i(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds = \\ = \varphi(x) + \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^x K(x_{i+1}, s) \psi_i(x) L_{n+1}[f(s)] ds.$$

Tinând cont de (1.3.9), de $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$ și de concluzia Teoremei 1.3.2, avem:

$$L_{n+1}[f(s)] = W[\varphi_0(s), \dots, \varphi_n(s), f(s)] \cdot W^{-1}[\varphi_0(s), \dots, \varphi_n(s)].$$

Diferențiind membru cu membru în (3.1.2), rezultă

$$f'(x) = \varphi'(x) + \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds + \\ + \sum_{i=0}^n \psi_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)].$$

Deoarece

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)] = \\ = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^n \psi_i(x) \sum_{j=0}^n G_j(x) \psi_j(x_i) = L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^n \psi_i(x) G_i(x) = \\ = L_{n+1}[f(x)] K(x, x) = 0,$$

rezultă că

$$(3.1.3) \quad f'(x) = \varphi'(x) + \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds.$$

Diferențiind la fel membru cu membru relația (3.1.3) se obține

$$f''(x) = \varphi''(x) + \sum_{i=0}^n \psi''_i(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(x)] ds + \\ + \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)].$$

Analog

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) K(x_i, x) L_{n+1}[f(x)] &= \\ &= L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) \sum_{j=0}^n G_j(x) \psi_j(x_i) = \\ &= L_{n+1}[f(x)] \sum_{i=0}^n \psi'_i(x) G_i(x) = L_{n+1}[f(x)] \left. \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} \right|_{x=s} = 0. \end{aligned}$$

Adică

$$f''(x) = \varphi''(x) + \sum_{i=0}^n \psi''_i(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds.$$

În același mod derivata de ordinul k va fi:

$$(3.1.4) \quad f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^n \psi_i^{(k)}(x) \int_{x_i}^x K(x_i, s) L_{n+1}[f(s)] ds.$$

În continuare vom prezenta formule de derivare numerică concrete, în funcție de formulele de interpolare folosite.

3.2 Formula de derivare numerică în cazul interpolării Lagrange

Considerăm cazul interpolării Lagrange prezentată în paragraful 1.6, sub forma (1.6.7)

$$(3.2.1) \quad f(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x) + [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f]\omega(x),$$

$$\text{cu } \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Teorema 3.2.1. *Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, punctele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sunt nodurile de interpolare (1.2.5), $f \in C^{n+k}[a, b]$, atunci pentru orice $x \in [a, b]$ există $c_i \in co\{x_1, x_2, \dots, x_n, x\}$ (înfașurătoarea convexă a mulțimii $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x\}$) astfel încât*

$$\begin{aligned} (3.2.2) \quad L^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x) &= \\ &= f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^k \frac{i!}{(n+i)!} \cdot C_k^i f^{(n+i)}(c_i) \omega^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

Demonstrație. Afirmația teoremei va rezulta din derivarea relației (3.2.1). Mai întâi vom demonstra că

$$(3.2.3) \quad \frac{d^i}{dx^i} [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f] = i! [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}; f], \quad i \leq k.$$

Plecând de la definiția derivatei, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left([x_1, x_2, \dots, x_n, x+h; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f] \right) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [x_1, x_2, \dots, x_n, x+h, x; f] = [x_1, x_2, \dots, x_n, x, x; f], \end{aligned}$$

adică (3.2.3) este adevărată pentru $i = 1$. Presupunem că (3.2.3) e adevărată pentru $i < k$. Un calcul simplu ne conduce la relația

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left([x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{i+1 \text{ ori}}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}; f] \right) &= \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{i+1 \text{ ori}}, x; f] + \\ &\quad + [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{i \text{ ori}}, x, x; f] + \\ &\quad \cdots + [x_1, x_2, \dots, x_n, x+h, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}; f]. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $h \rightarrow 0$ și bazându-ne pe continuitatea diferențelor divizate, rezultă

$$\frac{d}{dx} [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}; f] = (i+1) [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+2 \text{ ori}}; f]$$

adică (3.2.3) este verificată prin inducție.

Prin derivare membru cu membru a relației (3.2.1) obținem:

$$\begin{aligned} L^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x; f|x) &= f^{(k)}(x) - \frac{d^k}{dx^k} ([x_1, x_2, \dots, x_n, x; f] \cdot \omega(x)) = \\ &= f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{d^i}{dx^i} [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f] \cdot \omega^{(k-i)}(x) = \\ &= f^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^k C_k^i i! [x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}; f] \omega^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

Aplicând Teorema 1.6.2, rezultă că există $c_i \in co\{x_1, \dots, x_n, x\}$ astfel încât $[x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{i+1 \text{ ori}}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+i)}(c_i)$, adică (3.2.2).

Teorema 3.2.2. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^n pe $[a, b]$ și x_1, x_2, \dots, x_n noduri de interpolare (1.2.5). Pentru orice $x_0 \in [a, b] \setminus co\{x_1, \dots, x_n\}$ și $0 \leq i \leq n$ există $c_i \in co\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ astfel încât

$$(3.2.4) \quad L^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x_0) = f^{(i)}(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(c_i) \omega^{(i)}(x_0).$$

Demonstratie. Conform ipotezei $x_0 \notin co\{x_1, \dots, x_n\}$ rezultă că $\forall i = \overline{0, n}$, $\omega^{(i)}(x_0) \neq 0$. Fie atunci $b_i \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(3.2.5) \quad f^{(i)}(x_0) - L^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x_0) = b_i \omega^{(i)}(x_0).$$

Dar funcția $g(x) = f(x) - L(x_1, \dots, x_n; f|x) - b_i \omega(x)$, se anulează cel puțin de n ori în $co\{x_1, \dots, x_n\}$. Conform teoremei lui Rolle, $g^{(i)}$ se anulează cel puțin de $n-i$ ori în $co\{x_1, \dots, x_n\}$. Având în vedere alegerea lui b_i și faptul că $x_0 \notin co\{x_1, \dots, x_n\}$ rezultă că $g^{(i)}$ se anulează de $n-i+1$ ori în $co\{x_1, \dots, x_n, x_0\}$.

Aplicând din nou teorema lui Rolle, derivata de ordin $n-i$ a lui $g^{(i)}$ are cel puțin o rădăcină în $co\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Există deci $c_i \in co\{x_0, \dots, x_n\}$ astfel încât $f^{(n)}(c_i) - b_i n! = 0$, deci $b_i = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c_i)$ și afirmația teoremei rezultă din (3.2.5).

3.3 Integrarea numerică a funcțiilor

Multe probleme practice conduc în final la calculul funcționalei

$$(3.3.1) \quad \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x) dx,$$

unde, pentru simplitate, vom propune că $f \in C[a, b]$. Rezolvarea problemei (3.3.1) nu este posibilă totdeauna, de exemplu dacă primitiva funcției f nu poate fi găsită sau dacă valorile funcției f sunt cunoscute în urma unor măsurători, doar într-un număr finit de puncte.

Din aceste motive se caută metode simple care pot aproxima funcționala considerată. Astfel de metode ne conduc în general la formule de forma:

$$(3.3.2) \quad \mathcal{I}_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^n w_k f(x_k),$$

numite formule de cuadratură, unde $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ sunt distințe două câte două și se numesc abscise sau nodurile formulei, $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ se numesc ponderi iar produsele $w_i(b - a)$, $i = \overline{1, n}$ se numesc coeficienții formulei.

Nodurile x_0, x_1, \dots, x_n fiind date, se pune problema determinării ponderilor w_0, w_1, \dots, w_n , astfel ca formula de cuadratură (3.3.2) obținută să fie *cât mai bună*. Într-un anumit sens o formulă de cuadratură este cu atât mai bună cu cât gradul său de exactitate este mai mare.

Definiția 3.3.1. Numărul $p \in \mathbb{N}^*$ se numește grad de exactitate al formulei de cuadratură \mathcal{I}_n dacă sunt satisfăcute egalitățile:

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_n(x^i) &= \mathcal{I}(x^i), \quad \text{pentru } i = \overline{0, p} \\ \mathcal{I}_n(x^{p+1}) &\neq \mathcal{I}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Altfel spus, gradul de exactitate al formulei \mathcal{I}_n este, prin definiție, cel mai mic $p \in \mathbb{N}^*$, care satisface condițiile (3.3.3).

Observația 3.3.1. Formula de cuadratură (3.3.2) este o aplicație $\mathcal{I}_n : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aditivă și omogenă, adică

$$(3.3.4) \quad \mathcal{I}_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{I}_n(f) + \beta \mathcal{I}_n(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}[a, b], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Folosind aceasta, este ușor de văzut că are loc:

Observația 3.3.2. Formula de cuadratură \mathcal{I}_n are gradul de exactitate p , dacă și numai dacă $\mathcal{I}_n(\mathcal{P}) = \mathcal{I}(\mathcal{P})$ pentru toate polinoamele \mathcal{P} de grad mai mic sau egal cu p și $\mathcal{I}_n(\mathcal{P}) \neq \mathcal{I}(\mathcal{P})$ pentru polinoame \mathcal{P} de grad mai mare sau egal cu $p + 1$.

3.4 Formule de cuadratură de tip interpolator

Definiția 3.4.1. Numim formulă de cuadratură de tip interpolator o aproximare a lui $\mathcal{I}(f)$ dată de

$$(3.4.1) \quad \mathcal{I}_n(f) := \int_a^b \mathcal{Q}_n(x) dx,$$

unde \mathcal{Q}_n este un polinom de interpolare a lui f , în raport cu mulțimea de puncte $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)) \in \mathbb{R}^2$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ fixat și nodurile distințe două $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

Observația 3.4.1. Gradul de exactitate a formulei de cuadratură de tip interpolator \mathcal{I}_n este evident cel mai mic n .

Expresia explicită a formulei de cuadratură de tip interpolator, cu noduri simple, este dată de următoarea teoremă:

Teorema 3.4.1. *Formula de cuadratură (3.4.1) în cazul când Q_n este polinomul lui Lagrange, are forma*

$$(3.4.2) \quad \mathcal{I}_n(f) = (b - a) \sum_{k=0}^n w_k f(x_k),$$

unde $w_k := \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} dt$ și $t_j = \frac{x_j - a}{b - a}$, $j = \overline{0, n}$; $k = \overline{0, n}$.

Demonstratie. Folosind formula de interpolare Lagrange pentru Q_n , rezultă:

$$Q_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k, \quad \text{unde } L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

deci

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx.$$

Calculând integrala din relația de mai sus, rezultă:

$$\begin{aligned} \int_a^b L_k(x) dx &= \int_a^b \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx = \\ &= (b - a) \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - t_j}{t_k - t_j} dt = (b - a) w_k, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 3.4.2. a) Formula (3.4.2) are avantajul că ponderile w_k nu depind de capetele intervalului a și b pe care e definită funcția f . Ponderile w_k depind doar de nodurile x_k din intervalul $[a, b]$.

b) Ponderile w_k au proprietatea că

$$(3.4.3) \quad \sum_{k=0}^n w_k = 1,$$

deoarece gradul de exactitate a formulei (3.4.2) este cel puțin 0, iar pentru $f = 1$ avem

$$(b - a) \sum_{k=0}^n w_k = \mathcal{I}_n(1) = \mathcal{I}(1) = b - a.$$

3.5 Formulele de cuadratură Newton-Côtes

Dacă nodurile x_k din formula de cuadratură (3.4.2) sunt echidistante, se obține formula de cuadratură Newton-Côtes.

Renumerotând nodurile x_k , astfel ca $x_0 = a$ și $x_n = b$, vom obține

$$x_k := a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

iar formula de cuadratură, în acest caz, se numește **Newton-Côtes închisă**. Cu aceste notații ponderile w_k , în cazul formulei Newton-Côtes au proprietatea dată de următoarea lemă:

Lema 3.5.1. *Ponderile w_k , $k = 0, 1, \dots, n$, corespunzătoare formulelor Newton-Côtes sunt date de relațiile:*

$$(3.5.1) \quad w_k = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds, \quad \text{pentru } k = \overline{0, n}.$$

Demonstrație. Folosind (3.4.2) cu substituția $t_k = \frac{k}{n}$, obținem:

$$w_k = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{t - \frac{j}{n}}{\frac{k}{n} - \frac{j}{n}} dt = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{s-j}{k-j} ds.$$

Proprietatea de simetrie a ponderilor w_k corespunzătoare formulelor Newton-Côtes este dată în

Lema 3.5.2. *Ponderile w_k , $k = \overline{0, n}$ din formulele Newton-Côtes satisfac egalitatea*

$$(3.5.2) \quad w_{n-k} = w_k, \quad \text{pentru } k = \overline{0, n}.$$

Demonstrație. Folosind proprietatea polinoamelor lui Lagrange L_k , avem:

$$\begin{aligned} L_k(a + b - x_{n-j}) &= L_k \left(b + a - \left(a + (n-j) \frac{(b-a)}{n} \right) \right) = \\ &L_k \left(a + j \frac{b-a}{n} \right) = L_k(x_j) = \delta_{kj} = L_{n-k}(x_{n-j}), \quad \text{pentru } j = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Din unicitatea polinomului de interpolare rezultă

$$L_{n-k}(x) = L_k(a + b - x), \quad x \in [a, b],$$

și de aici

$$\begin{aligned} w_{n-k} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_{n-k}(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(b+a-x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(t) dt = w_k, \end{aligned}$$

cu precizarea că în ultima egalitate am făcut substituția $x = b + a - t$.

Observația 3.5.1. Pentru $n \geq 2$ par, formulele Newton-Côtes închise, au gradul de exactitate $n + 1$. Adică, dacă în formula de cuadratură funcția f este un polinom de grad impar, formula Newton-Côtes închisă este exactă.

3.5.1 Cazuri particulare ale formulelor de cuadratură Newton-Côtes

a) În cazul particular cu $n = 1$, folosind proprietățile ponderilor date în (3.4.3) și (3.5.2) avem:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= 1 \\ w_0 &= w_1, \end{aligned}$$

de unde

$$w_0 = w_1 = \frac{1}{2}.$$

Astfel se obține **formula trapezelor**

$$(3.5.3) \quad \mathcal{I}_1(f) = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Această formulă este exactă pentru cazul polinoamelor de grad unu.

b) Pentru $n = 2$ se obține **formula lui Simpson**, care este exactă pentru polinomul de grad 3.

$$(3.5.4) \quad \mathcal{I}_2(f) = (b-a) \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \approx \int_a^b f(x) dx,$$

unde am aplicat proprietățile (3.4.3), (3.5.1) și (3.5.2), rezultând:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{s-1}{0-1} \cdot \frac{s-2}{0-2} ds = \frac{1}{6}, \quad w_2 = w_0 \\ w_1 &= 1 - w_0 - w_2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c) Pentru $n = 3$ se obține **formula lui Newton**:

(3.5.5)

$$\mathcal{I}_3(f) = (b-a) \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) \approx \int_a^b f(x) dx$$

d) Pentru $n = 4$ rezultă **formula lui Milne** (sau Boole-Villarceau):

$$(3.5.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_4(f) &= (b-a) \frac{1}{90} \left(7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{2(a+b)}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b) \right) \approx \int_a^b f(x) dx . \end{aligned}$$

Această formulă este exactă pentru polinomul de grad 5.

e) Pentru $n = 6$, se obține **formula lui Weddle** (sau Hardy), care nu va fi o formulă exactă pentru polinoame de grad șapte. În acest caz ponderile vor fi:

$$w_0 = w_6 = \frac{41}{840}, w_1 = w_5 = \frac{9}{35}, w_2 = w_4 = \frac{9}{280}, w_3 = \frac{34}{105},$$

deci formula de cuadratură se poate scrie

$$(3.5.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_6 &= (b-a) \left(\frac{41}{840} f(x_0) + \frac{9}{35} f(x_1) + \frac{9}{280} f(x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{34}{105} f(x_3) + \frac{9}{280} f(x_4) + \frac{41}{840} f(x_5) \right) \approx \int_a^b f(x) dx . \end{aligned}$$

f) Pentru $n = 8$ se obține următoarea formulă de cuadratură

$$(3.5.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_8(f) &= \frac{b-a}{28350} (989f(x_0) + 5888f(x_1) - 928f(x_2) + 10496f(x_3) - \\ &\quad - 4540f(x_4) + 10496f(x_5) - 928f(x_6) + 5888f(x_7) + \\ &\quad + 989f(x_8)) \approx \int_a^b f(x) dx . \end{aligned}$$

Observația 3.5.2. a) Se poate observa că începând de la $n = 8$, în formulele de cuadratură Newton-Côtes închise, apar ponderi negative. Acest lucru contrazice faptul că integrala este o limită a unei sume integrale care are ponderi doar cu valori pozitive. Din acest motiv, formulele Newton-Côtes sunt utilizate practic doar pentru $n \leq 7$.

b) Suma valorilor absolute a ponderilor depășește valoarea 1 (3.4.3), în cazul $n \geq 8$, acest lucru amplificând erorile de rotunjire.

Următoarea teoremă, prezentată aici fără demonstrație, justifică acest lucru:

Teorema 3.5.1. (Teorema lui Kusmin) *Ponderile $w_0^{(n)}, w_1^{(n)}, \dots, w_n^{(n)}$ ale formulei Newton-Côtes închise, au proprietatea că:*

$$\sum_{k=0}^n |\omega_k^{(n)}| \longrightarrow \infty \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty.$$

Observația 3.5.3. Analog se pot construi formule de cuadratură, cu noduri echidistante, dar care nu conțin și capetele intervalului de integrare. Acestea se numesc formule de cuadratură Newton-Côtes deschise sau **formulele lui Steffensen** care, pe intervalul $[-1, 1]$ au nodurile date de

$$(3.5.9) \quad x_j = -1 + \frac{2j+2}{n+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Observația 3.5.4. O formulă de cuadratură mult mai simplă este formula dreptunghiului, care în cazul cel mai simplu, pentru $n = 0$ și $x_0 = a$ se obține:

$$\mathcal{I}_0(f) = (b - a)f(a),$$

care se numește **formula dreptunghiului la stânga** sau

$$\mathcal{I}_0(f) = (b - a)f(b), \quad \text{cu } n = 0 \quad \text{și } x_0 = b,$$

care se numește **formula dreptunghiului la dreapta**.

Formula punctului median, pentru $n = 0$ și $x_0 = \frac{a+b}{2}$ are forma

$$\mathcal{I}_0(f) = (b - a)f\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

3.6 Evaluarea erorii în formulele de cuadratură

În acest paragraf se analizează eroarea de aproximare sau restul în formulele de cuadratură.

Definiția 3.6.1. Spunem că funcția $g : [c, d] \in \mathbb{R}$, $c < d$, are semn constant pe intervalul $[c, d]$ dacă $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [c, d]$, sau $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [c, d]$.

Fie $\mathcal{I}_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$ o formulă de cuadratură cu gradul de exactitate $p \in \mathbb{N}$, $p \geq n$, unde presupunem că $f \in C_{[a,b]}^{p+1}$, $x_k \in [a,b]$, $k = \overline{0,n}$.

Pentru fiecare $k = \overline{0,n}$ arătăm $t_k = \frac{x_k - a}{b - a}$. Considerăm în completare nodurile $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p \in [a,b]$ și $t_i = \frac{x_i - a}{b - a}$, $i = n+1, n+2, \dots, p$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.6.1. Cu notațiile de mai sus, dacă $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx$, atunci are loc relația

$$(3.6.1) \quad |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leq c_p \frac{(b-a)^{p+2}}{(p+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(p+1)}(\xi)|$$

unde

$$(3.6.2) \quad C_p = \min_{t_{n+1}, \dots, t_p \in [0,1]} \int_0^1 \prod_{k=0}^p |t - t_k| dt.$$

Dacă însă $t_k, k = \overline{0,n}$ corespund nodurilor de interpolare iar $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_p \in [0,1]$ se pot alege astfel că produsul $\prod_{k=0}^p (t - t_k)$ să păstreze semn constant pe $[0,1]$, atunci are loc relația:

$$(3.6.3) \quad \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) = C_p^1 \frac{(b-a)^{p+2}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)$$

unde $\xi \in [a,b]$ este un punct bine determinat și

$$(3.6.4) \quad C_p^1 = \int_0^1 \prod_{k=0}^p (t - t_k) dt.$$

Demonstratie. Fie $x_{n+1}, \dots, x_p \in [a,b]$ puncte arbitrar alese, astfel încât $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_p$ să fie distințe două câte două.

Notăm cu \mathcal{P}_p polinomul de interpolare al lui Lagrange cu nodurile x_i , $i = \overline{0,p}$ și valorile $f(x_i)$, $i = \overline{0,p}$.

Din faptul că $\mathcal{I}_n(f)$ are gradul de exactitate p , rezultă:

$$\mathcal{I}_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) = (b-a) \sum_{k=0}^n w_k \mathcal{P}_p(x_k) = \mathcal{I}_n(\mathcal{P}_p) = \mathcal{I}(\mathcal{P}_p)$$

și deci

$$(3.6.5) \quad \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(\mathcal{P}_p) = \int_a^b (f(x) - \mathcal{P}_p(x)) dx.$$

Se cunoaște din Teorema 1.4.3 că

$$(3.6.6) \quad f(x) - \mathcal{P}_p(x) = \frac{\omega(x)\nu(x)f^{(p+1)}(\xi(x))}{(p+1)!}, \quad x \in [a, b],$$

unde $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$, $\nu(x) = (x - x_{n+1}) \dots (x - x_p)$ și $\xi(x)$ este valoarea intermediară a funcției $\xi : [a, b] \rightarrow [a, b]$. În ipotezele precizate, înlocuind (3.6.6) în (3.6.5) se obține:

$$(3.6.7) \quad \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) = \frac{1}{(p+1)!} \int_a^b \omega(x)\nu(x)f^{(p+1)}(\xi(x)) dx.$$

Alegem punctele $x_{n+1}^{(m)}, \dots, x_p^{(m)} \in [a, b]$, $m = 1, 2, \dots$, astfel încât

$$x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}^{(m)}, \dots, x_p^{(m)}$$

să fie distințe două câte două (vezi (1.2.5)), și cu proprietatea că $x_k^m \rightarrow x_k$, pentru $m \rightarrow \infty$, $(k = n+1, \dots, p)$.

Notând cu $\nu_m(x) = \prod_{k=n+1}^p (x - x_k^{(m)})$ și luând $\nu(x) = \nu_m(x)$ în (3.6.7), se obține:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| &\leq \frac{1}{(p+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(p+1)}(\xi)| \int_a^b |\omega(x)\nu_m(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(p+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(p+1)}(\xi)| \left(\int_a^b |\omega(x)\nu(x)| dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b |\omega(x)| |\nu_m(x) - \nu(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Trecând la limită în ultimul termen al şirului de inegalități, termenul al doilea tinde la zero pentru $m \rightarrow \infty$, deoarece şirul de funcții ν_m converge uniform la ν pentru $m \rightarrow \infty$, pe intervalul $[a, b]$. Deci avem:

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leq \bar{c}_p \frac{1}{(p+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(p+1)}(x)|$$

cu

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= \min_{x_{n+1}, \dots, x_p \in [a,b]} \int_a^b \prod_{k=0}^p |x - x_k| dx = \\ &= (b-a)^{p+2} \min_{t_{n+1}, \dots, t_p \in [0,1]} \int_0^1 \prod_{k=0}^p |t - t_k| dt, \end{aligned}$$

unde prima egalitate se obține din continuitatea funcției $\omega(x)$ și a doua egalitate rezultă din substituția $x = (b - a)t + a$. De aici rezultă estimarea (3.6.2).

Pentru a demonstra estimarea (3.6.3) se consideră $x_k = (b - a)t_k + a$ pentru $k = n+1, \dots, p$, de unde rezultă că produsul $\omega\nu$ este de semn constant pe intervalul $[a, b]$, presupunem că

$$\omega(x)\nu(x) \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

Procedând analog, facem o majorare

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) \leq \frac{1}{(p+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} f^{(p+1)}(\xi) \int_a^b \omega(x)\nu(x)dx,$$

pentru $m \rightarrow \infty$ și făcând o minorare rezultă:

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) \geq \frac{1}{(p+1)!} \min_{t \in [a,b]} f^{(p+1)}(\xi) \int_a^b \omega(x)\nu(x)dx.$$

În aceste evaluări, pe lângă ipotezele precizate, am ținut seama de faptul că produsul $\omega\nu$ este de semn constant pe $[a, b]$.

Tinând cont că $f^{(p+1)}$ este o funcție continuă, va exista o valoare $\xi \in [a, b]$, astfel încât

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi) \int_a^b \omega(x)\nu(x)dx,$$

și după ce se face substituția $x = (b - a)t + a$, se obține evaluarea (3.6.3).

3.7 Formule Newton-Côtes compozite

Pentru calculul numeric al integralei

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

în unele cazuri se face o diviziune a segmentului $[a, b]$ de forma:

$$(3.7.1) \quad x_k = a + kh, \quad \text{pentru } k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

și pe fiecare subinterval (x_{k-1}, x_k) se aplică o formulă de cuadratură pentru aproximarea integralelor

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Însumând rezultatele, obținem o nouă formulă numită **formula de cuadratură compozită**.

3.7.1 Formula dreptunghiului compozită

Formulele dreptunghiului compozite (Observația 3.5.3) cu o diviziune dată de (3.7.1) au forma:

$$(3.7.2) \quad \mathcal{I}_0(h) = h \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

formula dreptunghiului la stânga,

$$(3.7.3) \quad \overline{\mathcal{I}}_0(h) = h \sum_{k=1}^N f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

formula dreptunghiului la dreapta.

Erorile corespunzătoare acestor formule sunt date în

Teorema 3.7.1. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuu diferențiabilă pe intervalul $[a, b]$. Atunci există valorile $\xi, \bar{\xi} \in [a, b]$ astfel încât:*

$$(3.7.4) \quad \int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_0(h) = \frac{b-a}{2} \cdot h \cdot f'(\xi),$$

$$(3.7.5) \quad \int_a^b f(x) dx - \overline{\mathcal{I}}_0(h) = -\frac{b-a}{2} \cdot h \cdot f'(\bar{\xi}),$$

unde $h = \frac{b-a}{N}$, și $\mathcal{I}_0(h)$ și $\overline{\mathcal{I}}_0(h)$ sunt date în (3.7.2) și (3.7.3).

Demonstratie. Considerând integrala pe subintervalul (x_{k-1}, x_k) , va exista $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ cu

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - h f(x_{k-1}) = \frac{h^2}{2} f'(\xi_k), \quad h = 1, \dots, N.$$

Însumând după k , rezultă

$$\int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_0(h) = \sum_{k=1}^N \frac{h^2}{2} f'(\xi_k) = \frac{b-a}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f'(\xi_k).$$

Tinând cont de inegalitățile:

$$\min_{x \in [a,b]} f'(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f'(\xi_k) \leq \max_{x \in [a,b]} f'(x)$$

și aplicând teorema de medie pentru funcția f' , rezultă că există o valoare $\xi \in [a, b]$ cu

$$f'(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f'(\xi_k),$$

de unde rezultă reprezentarea erorii dată de (3.7.4).

Pentru a demonstra (3.7.5) se procedează analog.

3.7.2 Formula trapezului compozită

Formula trapezului compozită se obține din formula trapezului (paragraful 3.5.1), aplicată pe fiecare subinterval (x_{k-1}, x_k) :

$$(3.7.6) \quad \mathcal{I}_1(h) = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Reprezentarea erorii în acest caz este dată în

Teorema 3.7.2. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori continuu diferențiabilă pe $[a, b]$. Atunci există o valoare $\xi \in [a, b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_1(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

unde $h = \frac{b-a}{N}$ și $\mathcal{I}_1(h)$ dată de (3.7.6).

Demonstratie. Analog Teoremei 3.7.1, există $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ cu

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_{k-1}) + f(x_k)] = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Însumând după k se obține:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_1(h) &= -\sum_{k=1}^N \frac{h^3}{12} f''(\xi_k) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f''(\xi_k) = \\ &= -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi). \end{aligned}$$

Am folosit teorema mediei pentru funcția f'' care garantează existența valorii $\xi \in [a, b]$, pentru a avea egalitatea adevărată.

3.7.3 Formula lui Simpson compozită

Analog și formula lui Simpson compozită se deduce din paragraful 3.5.1, aplicându-se pe subintervalul $[x_{k-1}, x_k]$:

(3.7.7)

$$\mathcal{I}_2(h) = \frac{h}{6} \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^N f(x_{k-1/2}) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right) \approx \int_a^b f(x) dx,$$

unde $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{N}$, $x_{k-1/2} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

Reprezentarea erorii în acest caz este dată în

Teorema 3.7.3. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de patru ori continuu diferențiabilă pe $[a, b]$. Atunci există o valoare $\xi \in [a, b]$ cu*

$$\int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_2(h) = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi),$$

unde $h = (b-a)/N$ și $\mathcal{I}_2(h)$ dată de (3.7.7).

Demonstrație. Analog demonstrației teoremei anterioare, pentru $k = 1, 2, \dots, N$ există $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ astfel încât

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{h}{6} [f(x_{k-1}) + 4f(x_{k-1/2}) + f(x_k)] = -\frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\xi_k).$$

Însumând după k rezultă

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}_2(h) &= -\sum_{k=1}^N \frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\xi_k) = \\ &= -\frac{b-a}{2880} \cdot h^4 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^{(4)}(\xi_k) = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

La fel am folosit teorema mediei pentru funcția $f^{(4)}$ care garantează existența lui $\xi \in [a, b]$, astfel încât să avem egalitatea demonstrată.

Observația 3.7.1. În formula compozită a lui Simpson, se cere ca ordinul de diferențiabilitate a funcției f să fie de două ori mai mare decât în formula compozită a dreptunghiului sau a trapezului.

Pentru funcții suficient de netede, formula lui Simpson este preferată, deoarece comparată, de exemplu cu formula trapezelor, acuratețea este mult mai bună.

3.8 Formulele de cuadratură de tip Gauss

Formulele prezентate în capitolele precedente se caracterizează prin faptul că se dădeau nodurile x_k și se proceda la obținerea ponderilor w_k . Formulele de cuadratură Gauss au proprietatea că, se încearcă printr-un algoritm determinarea punctelor x_k și a ponderilor w_k , astfel încât formula de cuadratură obținută să posede grad de exactitate maxim. Mai concret, în acest paragraf vom arăta că, printr-o alegere convenabilă a parametrilor (x_k, w_k) , se poate obține o formulă de cuadratură, cu n noduri, exactă pentru polinoame de grad cel mult $2n - 1$.

În cele ce urmează considerăm integrala

$$(3.8.1) \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx$$

unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată și ρ este o funcție pondere. În cele ce urmează vom considera numai integrale pe intervale finite, adică:

$$-\infty < a \leq b < \infty.$$

Definiția 3.8.1. *Funcția*

$$\rho : [a, b] \rightarrow (0, \infty]$$

se numește **funcție pondere** dacă este continuă pe porțiuni, pe intervalul deschis (a, b) și integrabilă pe tot intervalul $[a, b]$.

Pentru calculul numeric al integralei (3.8.1) vom considera cuadraturi de forma:

$$(3.8.2) \quad \mathcal{I}_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(x_k).$$

Vom căuta nodurile x_k și coeficienții ω_k în aşa fel încât gradul de exactitate al formulei (3.8.2) să fie cât mai mare. Noțiunea de cuadratură prin formule de interpolare și grad de exactitate poate fi aplicată și integralelor cu ponderi. Rezultatul se va numi formula de **cuadratură de tip Gauss**.

Un rol important pentru studiul acestor formule îl joacă polinoamele ortogonale, pe care le vom aminti în cele ce urmează.

3.8.1 Polinoame ortogonale

Fie \mathcal{P} mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali.

Definiția 3.8.2. Pentru o funcție pondere dată $\rho : [a, b] \rightarrow (0, \infty]$, definim o aplicație $(\cdot, \cdot) : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$(p, q) = \int_a^b p(x)q(x)\rho(x)dx, \text{ pentru } p, q \in \mathcal{P}$$

și numărul $\|p\| = (p, p)^{1/2}$ numite normă lui p .

Această aplicație este un produs scalar pe spațiul polinoamelor cu coeficienți reali \mathcal{P} .

Definiția 3.8.3. a) Două polinoame $p, q \in \mathcal{P}$ se numesc **ortogonale**, dacă $(p, q) = 0$.

b) **Complementul ortogonal** al mulțimii $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ este dat prin

$$\mathcal{P}_n^\perp = \{p \in \mathcal{P} : (p, q) = 0, \forall q \in \mathcal{P}_n\},$$

unde \mathcal{P}_n este subspațiu liniar al lui \mathcal{P} , format din polinoame de grad cel mult n .

Un exemplu de poligoane ortogonale poate fi obținut prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, aplicat monoamelor $1, x, x^2, \dots$:

$$(3.8.3) \quad p_0 = 1,$$

$$(3.8.4) \quad p_n = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, p_j)}{\|p_j\|^2} \cdot p_j, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Se poate ușor observa că polinomul p_n , obținut mai sus, are proprietatea că este de grad n , cu coeficientul lui x^n egal cu 1 și are loc relația:

$$(3.8.5) \quad p_n \in \mathcal{P}_{n-1}^\perp.$$

Teorema 3.8.1. Polinoamele ortogonale date de relațiile (3.8.3) și (3.8.4) pot fi obținute folosind următoarele trei relații recursive:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_1 = x - \beta_0 \\ p_{n+1} &= (x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\text{unde } \beta_n = \frac{(xp_n, p_n)}{\|p_n\|^2}, \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\gamma_n = \frac{\|p_n\|}{\|p_{n-1}\|}, \quad \text{pentru } n = 1, 2, \dots$$

Demonstrație. Se observă că polinoamele p_0 și p_1 reproduc polinoamele din (3.8.3) și (3.8.4).

Folosindu-ne de principiul inducției matematice, presupunem că polinomul p_n este ortogonal pe toate polinoamele p_k , unde $0 < k \leq n - 1$ și verifică relațiile (3.8.3) și (3.8.4). Notăm apoi $q_{n+1} := (x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}$ și intenționăm să demonstrăm că $q_{n+1} = p_{n+1}$ și că verifică relațiile (3.8.3) și (3.8.4).

Să demonstrăm că $q_{n+1} \in \mathcal{P}_n^\perp$. Pentru aceasta ne folosim de egalitatea $(p_n, p_{n-1}) = 0$ și de definiția lui β_n și obținem:

$$\begin{aligned} (q_{n+1}, p_n) &= ((x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}, p_n) = (xp_n, p_n) - \beta_n \|p_n\|^2 = \\ &= (xp_n, p_n) - \frac{(xp_n, p_n)}{\|p_n\|} \cdot \|p_n\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Deoarece p_n este ortogonal pe polinoamele de grad mai mic sau egal cu $n - 1$, iar $\text{grad}(xp_{n-1} - p_n) < n$ rezultă că:

$$\begin{aligned} (q_{n+1}, p_{n-1}) &= ((x - \beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}, p_{n-1}) = \\ &= ((x - \beta_n)p_n, p_{n-1}) - \gamma_n^2 \|p_{n-1}\|^2 = \\ &= (xp_n, p_{n-1}) - \beta_n (p_n, p_{n-1}) - (p_n, p_n) = \\ &= (p_n, xp_{n-1}) - (p_n, p_n) = (p_n, xp_{n-1} - p_n) = 0. \end{aligned}$$

La fel se poate arăta că pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$ avem:

$$(3.8.6) \quad (q_{n+1}, p_k) = (xp_n, p_k) - \beta_n (p_n, p_k) = (p_n, xp_k) = 0.$$

De aici rezultă că polinomul q_{n+1} este ortogonal pe polinoame de grad cel mult n . Aceeași proprietate o are și polinomul p_{n+1} și deoarece polinomul q_{n+1} are coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1, avem

$$r := p_{n+1} - q_{n+1} \in \mathcal{P} \quad \text{și} \quad r = p_{n+1} - q_{n+1} \in \mathcal{P}_n^\perp,$$

de unde $p_{n+1} = q_{n+1}$, ceea ce am dorit să demonstrăm.

Teorema 3.8.2. *Rădăcinile x_1, x_2, \dots, x_n ale polinomului p_n sunt reale, distincte și avem:*

$$\begin{aligned} (3.8.7) \quad x_j &= \frac{(xL_j, L_j)}{\|L_j\|^2}, \quad j = 1, \dots, n \\ L_j(x) &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \end{aligned}$$

adică L_j sunt polinoame fundamentale Lagrange corespunzătoare rădăcinilor x_1, x_2, \dots, x_n .

Demonstrație. Pentru a demonstra că rădăcinile polinomului p_n sunt reale, în ipoteza că $p_n \in \mathbb{R}[X]$, presupunem prin absurd că p_n ar avea o rădăcină complexă. Aceasta ar implica faptul că p_n are factori de forma:

$$p_n(x) = ((x - \alpha)^2 + \beta^2)q(x) \quad (x_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta)$$

și $q(x) \in \mathbb{R}[X]$ de grad cel mult $n - 2$.

Dar

$$(p_n, q) = ((x - \alpha)^2 q, q) + \beta^2 (q, q) = \|(x - \alpha)q\|^2 + \beta^2 \|q\|^2 = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza că polinomul p_n este ortogonal pe orice polinom de grad cel mult $n - 1$.

Analog, pentru a demonstra că rădăcinile polinomului p_n sunt distincte, presupunem că λ ar fi o rădăcină dublă a lui p_n , deci p_n are forma:

$$p_n(x) = (x - \lambda)^2 g(x), \quad \text{unde } \text{grad } g = n - 2.$$

Atunci $(p_n, q) = \|(x - \lambda)^2 q\|^2 = 0$, ceea ce este imposibil.

Pentru a obține reprezentarea rădăcinilor dată în (3.8.7), fie

$$(3.8.8) \quad \omega_j(x) = \frac{p_n(x)}{x - x_j}.$$

Polinomul p_n fiind ortogonal pe orice polinom de grad cel mult $n - 1$, rezultă că $p_n \perp \omega_j$ și deci

$$0 = (\omega_j, p_n) = (\omega_j, x\omega_j) - (\omega_j, x_j\omega_j) = (\omega_j, x\omega_j) - x_j \|\omega_j\|^2,$$

de unde

$$(3.8.9) \quad x_j = \frac{(x\omega_j, \omega_j)}{\|\omega_j\|^2}.$$

Din (3.8.9) și (3.8.8) și din faptul că polinoamele ω_j și L_j diferă printr-un factor constant, rezultă

$$x_j = \frac{(xL_j, L_j)}{\|L_j\|^2}.$$

Cele mai cunoscute polinoame ortogonale folosite în formule de cuadratură de tip Gauss, pe intervalele și cu funcțiile pondere corespunzătoare sunt:

polinoame Legendre, cu $\rho(x) = 1$, pe $(-1, 1)$;

polinoame Cebâșev, cu $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, pe $(-1, 1)$;

polinoame Jacobi, cu $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, pe $(-1, 1)$;

polinoame Hermite, cu $\rho(x) = e^{-x^2}$, pe $(-\infty, +\infty)$;

polinoame Laguerre, cu $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$, pe $(-\infty, \infty)$.

3.8.2 Alegerea optimală a punctelor x_k și a ponderilor w_k

Următoarea teoremă stabilește condițiile în care, pentru n puncte x_k și ponderi w_k , gradul de exactitate a formulei de cuadratură Gauss este $2n - 1$.

Teorema 3.8.3. *Fie x_1, x_2, \dots, x_n numere reale distințe din intervalul (a, b) și w_1, w_2, \dots, w_n numere reale arbitrale. Pentru ca egalitatea*

$$(3.8.10) \quad (p, 1) = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i)$$

să aibă loc pentru orice polinom ortogonal p de grad cel mult $2n - 1$, ($p \in \mathcal{P}_{2n-1}$), este necesar și suficient ca x_1, x_2, \dots, x_n să coincidă cu rădăcinile polinomului ortogonal p_n (vezi (3.8.7)), iar

$$w_i = (L_i, 1) \quad \text{unde} \quad L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad i = \overline{1, n}$$

reprezintă polinoame fundamentale Lagrange corespunzătoare nodurilor x_1, x_2, \dots, x_n .

Demonstratie. Presupunem formula (3.8.10) adevărată pentru orice polinom de grad cel mult $2n - 1$. Fie

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad \text{și} \quad p(x) = x^k \omega(x)$$

unde $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Aplicând (3.8.10) polinomului $p(x)$ rezultă:

$$(\omega, x^k) = (x^k \omega, 1) = (p, 1) = \sum_{j=1}^n w_j p(x_j) = \sum_{j=1}^n w_j x_j^k \omega(x_j) = 0,$$

deoarece $\omega(x_j) = 0$.

De aici rezultă că ω este ortogonal pe polinoame de grad cel mult $n - 1$, adică $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}^\perp$. Dar această proprietate o are și p_n , iar $\text{grad}(\omega - p) \leq n - 1$, rezultă că $\omega - p$ este ortogonal pe $\omega - p$, deci $\omega = p$.

În continuare, folosind (3.8.10) cu $p = L_j$, avem:

$$(L_j, 1) = \sum_{k=1}^n w_k L_j(x_k) = w_j,$$

deoarece $L_j(x_k) = \delta_{jk}$.

Pentru a demonstra suficiența, presupunem că x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăciniile polinomului p_n și că $w_j = (L_j, 1)$. Fie p un polinom de grad cel mult $2n - 1$, $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$, pe care îl scriem sub forma:

$$p = p_n q + r,$$

unde q și r sunt polinoame de grad cel mult $n - 1$. Deoarece $p_n(x_j) = 0$, rezultă că

$$p(x_j) = r(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Polinomul r se poate scrie cu formula de interpolare Lagrange, relativă la nodurile x_1, x_2, \dots, x_n , astfel:

$$r(x) = \sum_{j=1}^n r(x_j) L_j(x) = \sum_{j=1}^n p(x_j) L_j(x).$$

De aici egalitatea (3.8.10) este ușor de demonstrat:

$$(p, 1) = (q, p_n) + (r, 1) = (r, 1) = \sum_{j=1}^n p(x_j) \cdot (L'_j, 1) = \sum_{j=1}^n w_j p(x_j).$$

Observația 3.8.1. Ponderile w_k au și o altă reprezentare, și anume dacă luăm $p = L_j^2$ în (3.8.10) avem:

$$(3.8.11) \quad w_j = (L_j^2, 1) = (L_j, L_j) > 0.$$

Observația 3.8.2. Formula de cuadratură Gauss are ponderile pozitive pentru orice n , în contrast cu formula Newton-Côtes care are și ponderi negative de la $n \geq 8$.

Definiția 3.8.4. Formula de cuadratură

$$(3.8.12) \quad \mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

pentru $f \in C[a, b]$, cu x_i și w_i calculați ca în Teorema 3.8.3, se numește formula de cuadratură Gauss.

O consecință directă a Teoremei 3.8.3, este

Corolarul 3.8.1. Formula de cuadratură Gauss dată în (3.8.12) este o cuadratură prin interpolare și are gradul de exactitate cel puțin $r = 2n - 1$.

Demonstrație. Pentru o funcție $f \in C[a, b]$, fie un polinom de interpolare Lagrange $Q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ corespunzător nodurilor x_i și valorilor $f(x_i)$. Din (3.8.10) avem:

$$\sum_{j=1}^n w_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n w_j Q_{n-1}(x_j) = (Q_{n-1}, 1),$$

iar din Teorema 3.8.3 se cunoaște că (3.8.10) are loc pentru orice polinom de grad cel mult $2n - 1$, de unde rezultă gradul de exactitate dat.

Următoarea teoremă dă o reprezentare a erorii în cazul folosirii formulei de cuadratură a lui Gauss.

Teorema 3.8.4. *Pentru o funcție $f \in C^{2n}[a, b]$, restul în formula de cuadratură Gauss (3.8.12) este dat de:*

$$(3.8.13) \quad \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f) = \left(\frac{1}{(2n)!} \int_a^b p_n^2(x) \rho(x) dx \right) f^{(2n)}(\xi) = \\ = \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n)!} \left(\int_0^1 \prod_{k=1}^n (t-t_k)^2 \rho((b-a)t+a) dt \right) f^{(2n)}(\xi)$$

cu $t_k = \frac{x_k - a}{b - a}$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$ și cu o valoare $\xi \in [a, b]$.

Demonstrație. Gradul de exactitate a cuadraturii Gauss (3.8.12) este, conform Corolarului 3.8.1, $r = 2n - 1$. Alegem în plus față de x_1, x_2, \dots, x_n , punctele $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, \dots, x_{2n} = x_n$, atunci

$$\prod_{k=1}^{2n} (x - x_k) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)^2 = p_n^2(x),$$

care are semn constant pe $[a, b]$ și relația (3.8.13) se demonstrează analog cu demonstrația dată la Teorema 3.6.1.

Observația 3.8.3. O consecință a Teoremei 3.8.4 ne arată că gradul de exactitate al formulei lui Gauss este $r = 2n - 1$ și acesta este optimal.

3.9 Formule de cubatură

Prin formulă de cubatură se înțelege o formulă de aproximare numerică a unei integrale multiple.

Complexitatea calculului aproximativ a integralelor pe domenii multidimensionale constă în: o mare varietate a domeniilor de integrare, dificultatea metodelor de construire a formulelor de interpolare, numărul mare de noduri în care se calculează valorile pentru funcția integrată, costul mare al implementării pe calculator, etc.

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ și funcția nenegativă $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ numită funcție pondere. Notăm cu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ și $d\mathbf{x} = dx_1, \dots, dx_n$.

Definiția 3.9.1. Numim formulă de cubatură o relație de forma:

$$(3.9.1) \quad I(f) = \int_D \rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx I_m(f) = \sum_{k=1}^m w_k f(\mathbf{x}_k)$$

unde $w_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$ se numesc coeficienții (ponderile) formulei de cubatură, iar $\mathbf{x}_k \in D$, $k = \overline{1, m}$ sunt nodurile formulei de cubatură.

În obținerea formulelor de cubatură (3.9.1) se folosesc metode similare cu cele folosite la obținerea formulelor de cuadratură. Astfel, unul din proceadele folosite constă în aproximarea funcției de integrat printr-o funcție mai simplă, cel mai adesea printr-un polinom, după care se determină constantele w_k , astfel ca formula (3.9.1) să fie exactă pentru funcția aproximantă.

Cele mai cunoscute tehnici în deducerea formulelor de cubatură sunt: metoda formulelor tip produs și metoda formulelor nonprodus.

3.9.1 Formulele de cubatură de tip produs

Formulele de cubatură de tip produs au la bază metoda separării variabilelor, iar domeniul de integrare este în general rectangular.

Vom începe cu un exemplu de aproximare a unei integrale duble.

Fie domeniul dreptunghiular $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ și $(m+1)(n+1)$ noduri distincte din acest domeniu: $M = \{x_0, \dots, x_m\} \subset [a, b]$; $N = \{y_0, \dots, y_n\} \subset [c, d]$ și $M \times N = \{(x_i, y_j) \mid i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}\} \subset D$.

Considerăm formula de interpolare a lui Lagrange relativ la funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f \in C^{m+1, n+1}(D)$ și nodurile (x_i, y_i) , $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$ dată de relația

$$(3.9.2) \quad f(x, y) = L_{m,n}(x, y) + R_{m,n}(f(x, y)), \quad (x, y) \in D$$

unde

$$L_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_{m,i}^{[1]}(x) \cdot L_{n,j}^{[2]}(y) f(x_i, y_j)$$

este polinomul de interpolare Lagrange pentru o funcție de două variabile, iar $R_{m,n}(f(x, y))$ este restul.

Am notat cu

$$\begin{aligned} L_{m,i}^{[1]}(x) &= \prod_{k=0}^m \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = \overline{0, m} \\ L_{n,j}^{[2]}(y) &= \prod_{k=0}^n \frac{y - y_k}{y_j - y_k}, \quad j = \overline{0, n} \end{aligned}$$

polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange relative la punctele multimilor M , respectiv N .

Înegrând formula de interpolare (3.9.2) se obține formula de cubatură produs, pentru acest caz:

$$(3.9.3) \quad \int_a^b \int_c^d \rho(x, y) f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} f(x_i, y_j) + R_{m,n}(f)$$

unde ρ este o funcție pondere.

Dacă funcția pondere este $\rho = 1$, coeficienții $w_{i,j}$ ai formulei de cubatură sunt obținuți din produsele coeficienților formulelor de quadratură (unidimensionale), astfel:

$$w_{i,j} = \int_a^b L_{m,i}^{[1]}(x) dx \int_c^d L_{n,j}^{[2]}(y) dy, \quad i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}$$

În acest caz, dacă considerăm nodurile echidistante, adică $x_i = a + ih$, $y_j = c + jk$, cu $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$, $h = \frac{b-a}{m}$, $k = \frac{d-c}{n}$, se obține **formula de cubatură de tip Newton-Côtes**.

În cazul particular $m = n = 1$ se obține **formula trapezului**:

$$\begin{aligned} (3.9.4) \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &= \\ &= \frac{(b-a)(d-c)}{4} [f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)] + R_{1,1}(f). \end{aligned}$$

Pentru cazul general când $D \subset \mathbb{R}^n$, scopul este de a găsi o transformare de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

astfel ca integrala pe domeniul n dimensional $\int_D \rho(x)f(x)dx$ să se transforme într-un produs de integrale unidimensionale

$$\int \rho_1(u_1)g(u_1)du_1 \dots \int \rho_n(u_n)g(u_n)du_n.$$

Atunci formula de cubatură se va obține din produsul a n formule de cuadratură pentru integrale unidimensionale.

În cazurile particulare, când domeniul D este un hipercub (n -cub), o hipersferă (n -sferă) sau un hipersimplex (n -simplex), se pot construi formule produs de n formule unidimensionale, fiecare folosind M puncte și având gradul de exactitate p . Formula de cubatură, va avea M^n puncte și gradul de exactitate p . Dezavantajul acestui procedeu este că numărul de puncte crește foarte mult cu dimensiunea n a domeniului D .

În cazul cubului n -dimensional, $D_n = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, considerăm că $D_n = D_p \cup D_q$ cu $D_p \subset \mathbb{R}^p$ și $D_q \subset \mathbb{R}^q$, cu $n = p + q$. Presupunem că integrantul are proprietatea că

$$(3.9.5) \quad \begin{aligned} \rho(x_1, \dots, x_n)f(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \rho_p(x_1, \dots, x_p)g(x_1, \dots, x_p)\rho_q(x_{p+1}, \dots, x_n)h(x_{p+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

și că pe domeniile D_p și D_q avem următoarele formule de cubatură:

$$(3.9.6) \quad \int_{D_p} \rho_p(x_1, \dots, x_p)g(x_1, \dots, x_p)dx_1, \dots, dx_p \approx \sum_{i=1}^{N_p} b_i g(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

de grad p și

$$(3.9.7) \quad \begin{aligned} \int_{D_q} \rho_q(x_{p+1}, \dots, x_n)h(x_{p+1}, \dots, x_n)dx_{p+1}, \dots, dx_n &\approx \\ &\approx \sum_{j=1}^{N_q} c_j h(\beta_{p+1}, \dots, \beta_n) \end{aligned}$$

de grad q .

Cu aceste notări și ipoteze, se poate obține următorul rezultat:

Teorema 3.9.1. *Forma de cubatură*

$$(3.9.8) \quad \int_{D_n} \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_q} w_{ij} f(x_{ij})$$

este de grad $r = \min(p, q)$ cu $N = N_p \cdot N_q$ puncte, unde $w_{ij} = b_i \cdot c_i$ și

$$x_{ij} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n).$$

Demonstratie. Integrând (3.9.5) și folosind formulele (3.9.6) și (3.9.7) rezultă afirmația teoremei.

Pentru cazul simplexului n -dimensional T_n , generat de vârfurile

$$\{(1, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, 0)\}$$

unde T_2 este un triunghi, iar T_3 un tetraedru, vom folosi o transformare de coordonate, pentru cazul particular $\rho = 1$ și $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, care să ne permită să transformăm formula de cubatură pe T_n , într-un produs de formule de cuadraturi.

Se cunoaște că pentru orice n -simplex T , generat de punctele a_1, \dots, a_{n+1} , nesituate în același hiperplan, există o transformare afină

$$x = \alpha_0 + \alpha u,$$

nesingulară, ce transformă T_n în T , deci este suficient să cunoaștem formulele de cubatură pe T_n pentru a putea calcula formula de cubatură pe orice n -simplex T .

Plecăm de la

$$(3.9.9) \quad \int_{T_n} x^\alpha dx = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} dx_1, \dots, dx_n,$$

folosind, pentru (3.9.9), transformarea de coordonate

$$(3.9.10) \quad \begin{cases} x_1 = y_1 & = y_1 \\ x_2 = y_2(1 - y_1) & = y_2(1 - x_1) \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ x_n = y_n(1 - y_{n-1}) \dots (1 - y_1) & = y_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}), \end{cases}$$

și ținând seama că limitele de integrare pentru x_i sunt $0 \leq x_i \leq 1 - x_1 - \cdots - x_{n-i-1}$, $i = \overline{1, n}$, care se vor transforma pentru y_i în $0 \leq y_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, jacobianul transformării (3.9.10) este

$$J = (1 - y_1)^{n-1} (1 - y_2)^{n-2} \cdots (1 - y_{n-1}).$$

Integrala (3.9.9) devine:

$$(3.9.11) \quad \int_{T_n} x^n dx = \\ = \int_0^1 \dots \int_0^1 (1 - y_1)^{\beta_1} \dots (y - y_{n-1})^{\beta_{n-1}} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} dy_1 \dots dy_n$$

unde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2 + \dots + \alpha_n + n - 1 \\ \beta_2 &= \alpha_3 + \dots + \alpha_n + n - 2 \\ \dots &= \dots \\ \beta_{n-1} &= \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că integrala (3.9.11) va fi este un produs de n integrale unidimensionale, de forma:

$$I_k = \int_0^1 (1 - y_k)^{n-k} p_k(y_k) dy_k, \quad k = \overline{1, n}$$

cu $p_x(y_k) = y_k^{\alpha_k} (1 - y_k)^{\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n}$, un polinom de grad $\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n$ în variabila y_k .

Adică, dacă vom avea n formule de cuadratură, fiecare de grad p , se poate obține o formulă de cubatură pe T_n , tot de grad p .

3.10 Aplicații ale integrării numerice în metode de element finit

În metodele de element finit, elementele matricei de "rigiditate" (matricea coeficienților sistemului algebric) și ale vectorului de solicitare (termenul liber), se exprimă prin integrale uni, bi sau tridimensionale, definite pe domenii (elemente) uni, bi sau tridimensionale: $[a, b]$; $[a, b] \times [c, d]$, respectiv $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

Prinț-o transformare σ , bijectivă și bicontinuă, aceste domenii (elemente) se transformă în domenii (elemente) de referință corespunzătoare $[-1, 1]$, $[-1, 1] \times [-1, 1]$, respectiv $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Avantajul este că pe aceste elemente de referință se calculează o singură dată abscisele și ponderile din formulele de integrare aproximativă, iar prin transformarea σ se pot calcula formulele de integrare numerică pe domeniile (elementele) reale ale problemei.

Prezentăm integralele unor monoame pe elementele de referință, care sunt cele mai folosite în metoda elementelor finite.

Integrala pe domeniul de referință unidimensională $[-1, 1]$:

$$(3.10.1) \quad \int_{-1}^1 x^k dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \text{ este impar} \\ \frac{2}{k+1}, & \text{dacă } k \text{ este par.} \end{cases}$$

Integrala pe domeniul de referință pătrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$(3.10.2) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^k y^l dx dy = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \text{ sau } l \text{ este impar} \\ \frac{4}{(k+1)(l+1)}, & \text{dacă } k \text{ și } l \text{ sunt pare.} \end{cases}$$

Integrala pe domeniul de referință triunghiular:

$$(3.10.3) \quad \int_0^1 \int_0^{1-x} x^k y^l dx dy = \frac{k! l!}{(k+l+2)!}.$$

Integrala pe domeniul de referință cubic:

$$(3.10.4) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^k y^l z^m dx dy dz = \\ = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \text{ sau } l \text{ sau } m \text{ este impar} \\ \frac{8}{(k+1)(l+1)(m+1)}, & \text{dacă } k \text{ și } l \text{ și } m \text{ sunt pare.} \end{cases}$$

Integrala pe domeniul de referință tetraedric este:

$$(3.10.5) \quad \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^k y^l z^m dx dy dz = \frac{k! l! m!}{(k+l+m+3)!}.$$

Metoda Gauss de integrare numerică este foarte utilizată în aproximarea cu metoda elementelor finite, unde dacă avem r abscise x_i și r ponderi w_i , se poate obține integrala exactă a unui polinom de grad $m \leq 2r - 1$.

Procedeul constă în aplicarea formulei de quadratură unui polinom $P(x)$:

$$(3.10.6) \quad \int_{-1}^1 P(x) dx = w_1 \cdot P(x_1) + \cdots + w_r \cdot P(x_r)$$

și determinarea celor $2r$ coeficienți ai polinomului $P(x)$, impunând ca polinomul

$$(3.10.7) \quad P(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_{2r} x^{2r-1}$$

să verifice exact relația (3.10.6).

Înlocuind (3.10.7) în (3.10.6) rezultă:

$$(3.10.8) \quad a_1 \int_{-1}^1 dx + a_2 \int_{-1}^1 x dx + \cdots + a_{2r} \int_{-1}^1 x^{2r-1} dx = \\ = a_1(w_1 + w_2 + \cdots + w_r) + a_2(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_rx_r) + \cdots + \\ + a_{2r}(w_1x_1^{2r-1} + w_2x_2^{2r-1} + \cdots + w_rx_r^{2r-1}).$$

Pentru ca (3.10.8) să fie verificată identic, este necesar ca:

$$\int_{-1}^1 x^\alpha dx = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r w_i x_i^\alpha; \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2 \\ \int_{-1}^1 x^\alpha dx = 0 = \sum_{i=1}^r w_i x_i^\alpha; \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

adică

$$(3.10.9) \quad \begin{cases} w_1 + w_2 + \cdots + w_r = 2 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_rx_r = 0 \\ w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + \cdots + w_rx_r^2 = \frac{2}{3} \\ \cdot \\ w_1x_1^{2r-1} + w_2x_2^{2r-1} + \cdots + w_rx_r^{2r-1} = 0. \end{cases}$$

Acesta este un sistem de $2r$ ecuații algebrice cu $2r$ necunoscute (w_i, x_i) , $i = \overline{1, r}$, liniar în w_i și neliniar în x_i , care se rezolvă impunând condiția ca

$$(3.10.10) \quad \begin{cases} w_i > 0 \\ x_i \in (-1, 1), \quad i = \overline{1, r}. \end{cases}$$

În cazul $r = 2$, aproximarea va fi exactă pentru un polinom de grad $2r - 1 = 3$, din (3.10.9) se obține $w_1 = w_2 = 1$ și $x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Metoda Newton-Côtes de integrare numerică, folosită în aproximarea cu metoda elementelor finite constă în: se fixează apriori abscisele x_i și rămâne să se determine r ponderi w_1, \dots, w_r , astfel ca relația (3.10.6) să fie identic verificată pentru un polinom de grad $r - 1$. Abscisele $x_i \in [-1, 1]$ sunt simetrice față de $x = 0$ și echidistante:

$$x_i = 2 \frac{i-1}{r-1} - 1.$$

După calcule, considerând funcția polinomială reprezentată printr-un polinom Lagrange de grad $r - 1$, se obțin ponderile

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx.$$

Observația 3.10.1.

- a) Ponderile ce corespund absciselor simetrice față de $x = 0$, sunt egale.
- b) Pentru un număr dat de puncte de integrare (x_i, w_i) , gradul maxim al polinomului care dă integrala exactă cu metoda Newton-Côtes, este mai mic decât gradul maxim al polinomului obținut cu metoda Gauss.
- c) Integrarea termenilor conținând polinoame de interpolare Lagrange L_i este mult simplificată, deoarece L_i se anulează în abscise x_j cu $i \neq j$.
- d) Pentru a micșora volumul de calcul, în practica aproximării cu elemente finite, se dorește micșorarea numărului de puncte de integrare (x_i, w_i) . Numărul minim al punctelor de integrare depinde de tipul domeniului (elementului) pe care se face integrarea, păstrând condiția ca matricea coeficienților sistemului (de rigiditate) să rămână nesingulară.

REFERINȚE

În redactarea acestui capitol am folosit lucrările [54], [55], [102], [122], [138], [140] și [141].

Capitolul 4

Interpolarea inversă și metode de iteratie

Una dintre problemele care a condus la interpolarea inversă, este problema rezolvării numerice a ecuațiilor.

Polinomul de interpolare inversă, indiferent dacă acesta este polinomul lui Lagrange, Hermite sau Taylor, este în general polinomul de interpolare al funcției inverse a unei funcții date. Polinomul de interpolare inversă, corespunzător unei funcții, poate fi scris, și el în multe cazuri are sens, chiar dacă funcția dată nu are o funcție inversă, pe intervalul care conține nodurile de interpolare.

În capitolul de față și în cele ce vor urma, vom studia interpolarea inversă cu un scop bine definit și anume, cu acela al construcției unor aproximări convenabile pentru rădăcinile unei ecuații date.

Fie $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ un interval al axei reale și fie $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție dată.

Pentru fixarea ideilor vom presupune că f admite o funcție inversă pe intervalul \mathbb{I} , adică există funcția $f^{-1} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{I}$, unde $\mathbb{F} = f(\mathbb{I})$, astfel încât $f^{-1}(f(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{I}$. Presupunem de asemenea că ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină $\bar{x} \in \mathbb{I}$. Înținând cont de cele de mai sus, rezultă că $\bar{x} = f^{-1}(0)$. Este deci normal să ne punem problema de a găsi metode de aproximare ale valorii funcției f^{-1} în punctul $y = 0$.

Fie φ o funcție care aproximează funcția f^{-1} cel puțin într-o vecinătate a punctului $y = 0$, atunci are loc o formulă de aproximare de forma:

$$(4.0.1) \quad f^{-1}(y) = \varphi(y) + R[f^{-1}; y].$$

Dacă neglijăm funcția $R[f^{-1}; y]$ și punem $y = 0$ în formula (4.0.1), atunci obținem pentru \bar{x} următoarea aproximare:

$$(4.0.2) \quad \bar{x} \cong \varphi(0).$$

Eroarea de aproximare a formulei (4.0.2) se poate evalua cu ajutorul inegalității:

$$|\bar{x} - \varphi(0)| = |R[f^{-1}; 0]|.$$

Asupra funcției φ se impun în mod natural două cerințe și anume:

- a) funcția φ să aproximeze cât mai bine funcția f^{-1} , adică valoarea absolută a funcției $R[f^{-1}; y]$ în punctul $y = 0$ să fie cât mai mică;
- b) funcția φ să prezinte anumite proprietăți de simplitate în ceea ce privește calculul valorilor sale.

Funcțiile care respescă cea de-a doua cerință cel mai bine, sunt evident, polinoamele, deoarece calculul valorilor lor se reduce la efectuarea celor patru operații aritmetice elementare. De aceea, în cadrul capitolului de față, vom arăta cum se construiesc aceste polinoame.

4.1 Polinomul de interpolare inversă al lui Lagrange

Considerăm funcția f definită pe intervalul \mathbb{I} și notăm cu \mathbb{F} imaginea intervalului \mathbb{I} prin funcția f , adică $f(\mathbb{I}) = \mathbb{F}$. În intervalul \mathbb{I} luăm $n+1$ puncte distincte pe care, pentru fixarea ideilor, le numerotăm în ordine crescătoare, adică:

$$(4.1.1) \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}.$$

Notăm cu y_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ valorile funcției f pe punctele din sistemul (4.1.1), adică $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. În ipoteza făcută la începutul capitolului de față, rezultă că $y_i \neq y_j$, dacă $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$. Se observă că putem presupune că $y_i \neq 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, n+1$. În interpolarea inversă, drept noduri de interpolare se consideră numerele reale y_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$, iar drept valori ale funcției f^{-1} , al cărui polinom de interpolare îl construim, considerăm chiar numerele x_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Se pune deci problema să construim un polinom de grad cel mult n care pe punctele y_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ se ia valorile x_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Existența și unicitatea unui astfel de polinom rezultă din paragraful 1.4. Tot din paragraful 1.4 se deduce și forma polinomului căutat, adică:

$$(4.1.2) \quad L(y_1, y_0, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\omega(y)}{(y - y_i)\omega'(y_i)},$$

$$\text{unde } \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i).$$

Dacă ținem cont de forma restului în formula de interpolare a lui Lagrange, vom fi conduși la următoarea formulă de aproximare:

$$(4.1.3) \quad f^{-1}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\omega(y)}{(y - y_i)\omega'(y_i)} + \frac{[f^{-1}(\xi)]^{(n+1)}}{(n+1)!} \omega(y),$$

unde ξ este un punct cuprins în interiorul celui mai mic interval care conține punctele y_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ și punctul y . Evident, ca formula (4.1.3) să fie adevărată, este necesar să facem ipoteza că funcția f este derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul \mathbb{I} , fapt ce ne asigură că f^{-1} este derivabilă pe F , așa cum rezultă din paragraful 2.2.

Din formula de aproximare (4.1.3) și din cele comentate la începutul capitolului de față, rezultă o formulă de aproximare pentru rădăcina \bar{x} a ecuației:

$$(4.1.4) \quad f(x) = 0.$$

Această formulă se deduce din (4.1.3) pentru $y = 0$, adică:

$$(4.1.5) \quad \bar{x} = f^{-1}(0) = - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\omega(0)}{y_i \omega'(y_i)} + \frac{[f^{-1}(\xi)]^{(n+1)}}{(n+1)!} \omega(0).$$

Observăm că pentru $\omega(0)$ are loc reprezentarea

$$(4.1.6) \quad \omega(0) = (-1)^{n+1} \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n+1}.$$

Dacă punctele x_i ; $i = 1, 2, \dots, n+1$ se aleg dintr-o vecinătate restrânsă a lui \bar{x} , atunci ne putem aștepta ca valorile funcției f pe aceste puncte să fie apropiate de zero și deci cantitatea $\omega(0)$ care este produsul acestor valori, să fie, cu atât mai mult, mai apropiată de zero. Putem deci neglijă restul în formula (4.1.5) și obținem pentru calculul lui \bar{x} următoarea formulă de aproximare:

$$(4.1.7) \quad \bar{x} \approx -\omega(0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{y_i \omega'(y_i)}.$$

Din (4.1.5) și (4.1.6) rezultă următoarea inegalitate:

$$(4.1.8) \quad \left| \bar{x} + \omega(0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{y_i \omega'(y_i)} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |y_1| \cdots |y_{n+1}|,$$

unde $M_{n+1} = \sup_{y \in \mathbb{F}} \left| (f^{-1}(y))^{(n+1)} \right|$.

Vom examina în continuare câteva cazuri particulare.

1. Cazul $n = 1$. În acest caz vom obține o metodă bine cunoscută și anume metoda coardei. Fie x_1, x_2 două puncte din vecinătatea rădăcinii ecuației (4.1.4) și y_1, y_2 valorile funcției f pe aceste puncte, atunci vom obține:

$$(4.1.9) \quad L(y_1, y_2; f^{-1}|y) = \frac{x_1(y - y_2)}{(y_1 - y_2)} + \frac{x_2(y - y_1)}{y_2 - y_1}$$

și

$$(4.1.10) \quad \bar{x} \approx L(y_1, y_2; f^{-1}|0) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1},$$

cu evaluarea

$$(4.1.11) \quad \left| \bar{x} - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \right| \leq \frac{M_2}{2!} |y_1| \cdot |y_2|,$$

unde dacă ținem cont de formula (2.4.1) atunci trebuie să presupunem că M_2 satisfacă inegalitatea

$$(4.1.12) \quad \sup \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right| \leq M_2,$$

unde supremumul de mai sus se consideră în raport cu x când acesta parcurge cel mai mic interval care conține pe \bar{x} , x_1 și x_2 . Formula (4.1.10) se mai poate obține, aşa cum vom arăta mai jos, și prin interpolare directă. Dacă scriem polinomul de interpolare al lui Lagrange de gradul 1 pe punctele x_1 și x_2 care ia valorile y_1 , respectiv y_2 , atunci vom obține:

$$(4.1.13) \quad L(x_1, x_2; f|x) = \frac{y_1(x - x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{y_2(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dacă rezolvăm acum ecuația

$$(4.1.14) \quad L(x_1, x_2; f|x) = 0,$$

obținem pentru \bar{x} următoarea aproximare:

$$(4.1.15) \quad \bar{x} \approx \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$$

adică aceeași aproximare ca cea obținută prin interpolare inversă cu formula (4.1.10).

Formula de aproximare obținută se poate scrie mai elegant dacă se folosesc diferențele divizate introduse în primul capitol al volumului de față și anume se vede că (4.1.10) se mai poate scrie:

$$(4.1.16) \quad \bar{x} \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{[x_1, x_2; f]} = x_3$$

sau

$$(4.1.17) \quad \bar{x} \approx x_2 - \frac{f(x_2)}{[x_1, x_2; f]} = x_3,$$

unde aşa cum am văzut $[x_1, x_2 : f] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Dacă considerăm restul în formula de interpolare a lui Lagrange, exprimat cu ajutorul diferențelor divizate, atunci obținem următoarea egalitate pentru valoarea funcției f pe \bar{x} și anume:

$$\begin{aligned} 0 = f(\bar{x}) &= f(x_1) + [x_1, x_2; f](\bar{x} - x_1) + \\ &+ [x_1, x_2, \bar{x}; f](\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) \end{aligned}$$

din care, dacă ținem cont de (4.1.16) și împărțim cu $[x_1, x_2; f]$, obținem pentru diferența $\bar{x} - x_3$ următoarea egalitate:

$$(4.1.18) \quad \bar{x} - x_3 = - \frac{[x_1, x_2, \bar{x}; f]}{[x_1, x_2; f]} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2).$$

Dacă presupunem acum că există constantele M_1, M_2, m_1, m_2 astfel încât au loc următoarele inegalități:

$$0 < m_1 \leq |[x, y; f]| \leq M_1$$

și

$$0 \leq m_2 \leq |[x, y; z; f]| \leq M_2,$$

unde x, y, z sunt puncte oarecare din cel mai mic interval ce conține punctele x_1, x_2 și \bar{x} , atunci obținem următoarea inegalitate:

$$(4.1.19) \quad \frac{m_2}{M_1} |\bar{x} - x_1| \cdot |\bar{x} - x_2| \leq |\bar{x} - x_3| \leq \frac{M_2}{m_1} |\bar{x} - x_1| \cdot |\bar{x} - x_2|.$$

Inegalitatea de mai sus ne dă o evaluare a diferenței dintre \bar{x} și aproximarea x_3 obținută cu oricare din formulele (4.1.16), (4.1.17) sau (4.1.15). Cu formula (4.1.19) am obținut, pentru eroare, atât o margine inferioară, cât și una superioară.

Exemplu numeric. Se dă ecuația:

$$x^3 - 9x^2 + 6 = 0.$$

Această ecuație are trei rădăcini, aşa cum ușor se poate arăta cu ajutorul șirului lui Rolle, $\bar{x}_1 \in (-1, 0)$; $\bar{x}_2 \in (0, 1)$; $\bar{x}_3 \in (6, 10)$.

Ne propunem să găsim o aproximare a rădăcinii \bar{x}_2 . Se constată cu ușurință că $\bar{x}_2 \in (0, 8; 0, 9)$. Notăm cu a_2 aproximarea ce se obține, adică avem:

$$a_2 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_2 - y_1} = \frac{0,8(-0,561) - 0,9(0,752)}{-0,561 - 0,752} = \frac{1,1256}{1,313} = 0,85727\dots$$

Se arată ușor că atunci când $x \in (0, 8; 0, 9)$ are loc identitatea:

$$\left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right| \leq \frac{12,6}{(13,77)^3} = M_2.$$

Tinând cont de formula (4.1.11) vom obține:

$$\begin{aligned} |\bar{x}_2 - 0,85727\dots| &\leq \frac{12,6}{(13,77)^3} \cdot (0,561)(0,752) \leq \\ &\leq \frac{5,3155872}{2610,969633} < \frac{54}{26109} < 0.003. \end{aligned}$$

Am obținut o aproximare a rădăcinii și evaluarea erorii dată de formula de mai sus.

2. Cazul n = 2. În acest caz polinomul de interpolare inversă are următoarea formă:

$$(4.1.20) \quad L(y_1, y_2, y_3; f^{-1}|y) = \frac{x_1(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} + \frac{x_2(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} + \frac{x_3(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

de unde obținem pentru \bar{x} următoarea aproximare:

$$(4.1.21) \quad \bar{x} \approx x_4 = \frac{x_1 y_2 y_3}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} + \frac{x_2 y_1 y_3}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} + \frac{x_3 y_1 y_2}{(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}.$$

Folosind formula (2.4.2) obținem pentru evaluarea erorii următoarea inegalitate:

$$|\bar{x} - x_4| = \frac{M_3}{3!} |y_1| \cdot |y_2| \cdot |y_3|,$$

unde, ținând cont de formula (2.4.2), am presupus că

$$M_3 = \sup \left| \frac{f'''(x)f'(x) - 3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5} \right|,$$

unde supremumul de mai sus este considerat în raport cu x când acesta parcurge cel mai mic interval ce conține punctele \bar{x}, x_1, x_2, x_3 .

În cazul de față, polinomul de interpolare al lui Lagrange de gradul doi, pe nodurile x_1, x_2, x_3 nu ne dă totdeauna rezultate bune, deoarece acesta sau are două rădăcini reale și în acest caz suntem puși în situația să alegem pe cea mai bună, adică aceea care aproximează mai bine rădăcina căutată, sau se poate întâmpla să nu admită nici o rădăcină reală și în acest caz, nu suntem conduși la nici un rezultat. Din aceste motive metoda interpolării directe nu se aplică, în general, pentru rezolvarea ecuațiilor. Dacă polinomul de interpolare obținut este de grad prea mare, atunci o problemă dificilă este chiar separarea rădăcinilor reale ale acestuia.

Metoda interpolării inverse, așa cum am văzut, ne oferă totdeauna o aproximare pentru rădăcina ecuației considerate, de aceea ea se aplică cu foarte bune rezultate când rădăcina ecuației considerate este o rădăcină simplă, adică $f'(\bar{x}) \neq 0$ și când dispunem de un interval destul de mic în care am reușit să izolăm rădăcina respectivă.

Dacă calculăm prin recurență diferențele divizate ale funcției inverse și folosim polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton, vom obține pentru aproximarea x_4 următoarea reprezentare cu ajutorul diferențelor divizate:

$$(4.1.22) \quad x_4 = x_1 - \frac{f(x_1)}{[x_1, x_2; f]} - \frac{[x_1, x_2, x_3; f] f(x_1)(x_2)}{[x_1, x_2; f] [x_1, x_3; f] [x_2, x_3; f]}.$$

4.2 Polinomul de interpolare inversă al lui Taylor

Considerăm funcția $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, unde \mathbb{I} este un interval al axei reale și $x_0 \in \mathbb{I}$ un punct interior intervalului \mathbb{I} . Vom presupune că funcția f admite o funcție inversă $f^{-1} : f(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{I}$, adică $f^{-1}(f(x)) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{I}$.

Asupra funcției f facem următoarele ipoteze:

- (i) *funcția f admite deriveate până la ordinul $n + 1$ inclusiv în intervalul \mathbb{I} și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{I}$;*
- (ii) *ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină \bar{x} în intervalul \mathbb{I} .*

În ipotezele de mai sus, dacă ținem cont de rezultatele paragrafului 2.3, privind derivele funcției inverse, și de formula (1.8.34), rezultă următoarea

egalitate:

$$(4.2.1) \quad f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{(f^{-1}(y_0))'}{1!} (y - y_0) + \cdots + \\ + \frac{(f^{-1}(y_0))^{(n)}}{n!} (y - y_0)^n + \frac{(f^{-1}(y_0 + \theta(y - y_0)))^{(n+1)}}{(n+1)!} (y - y_0)^{n+1}$$

unde $y \in f(\mathbb{I})$; $y_0 = f(x_0)$ și $0 < \theta < 1$. Datorită ipotezei (ii) rezultă că are loc egalitatea:

$$(4.2.2) \quad \bar{x} = f^{-1}(0) = x_0 - \frac{(f^{-1}(y_0))'}{1!} f(x_0) + \cdots \\ + (-1)^n \frac{(f^{-1}(y_0))^{(n)}}{n!} [f(x_0)]^n + \\ + (-1)^{n+1} \frac{(f^{-1}((1-\theta)y_0))^{(n+1)}}{(n+1)!} [f(x_0)]^{n+1},$$

sau dacă neglijăm restul, obținem următoarea aproximare pentru rădăcina \bar{x} a ecuației în cauză, adică:

$$(4.2.3) \quad \bar{x} \approx x_0 - \frac{[f^{-1}(y_0)]'}{1!} f(x_0) + \cdots + (-1)^n \frac{(f^{-1}(y_0))^{(n)}}{n!} [f(x_0)]^n.$$

Dacă notăm cu x_1 aproximarea obținută, adică:

$$(4.2.4) \quad x_1 = x_0 - \frac{[f^{-1}(y_0)]'}{1!} f(x_0) + \cdots + (-1)^n \frac{(f^{-1}(y_0))^{(n)}}{n!} [f(x_0)]^n,$$

atunci avem următoarea evaluare pentru valoarea absolută a diferenței $\bar{x} - x_1$, adică:

$$(4.2.5) \quad |\bar{x} - x_1| = \frac{|f^{-1}((1-\theta)y_0)^{(n+1)}|}{(n+1)!} |f(x_0)|^{n+1} \leq \\ \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |f(x_0)|^{n+1}$$

unde

$$M_{n+1} = \sup_{0 < \theta < 1} \left| f^{-1}((1-\theta)y_0)^{(n+1)} \right|.$$

Se observă fără dificultate că dacă x_0 se alege suficient de apropiat de \bar{x} , atunci $f(x_0)$ este aproape de zero și deci cu atât mai mult $|f(x_0)|^{n+1}$ se apropii de zero, adică x_1 este o aproximare mai bună decât x_0 pentru \bar{x} .

Ca și în paragraful anterior, vom considera și aici cazurile particulare ce rezultă din formula generală pentru diferite valori ale lui n .

1. Cazul $n = 1$. În acest caz, din formula (4.2.4) și formula care ne dă prima derivată a funcției inverse, obținem metoda tangentei sau metoda lui Newton-Raphson, adică:

$$(4.2.6) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Folosind formula (2.4.1) și formula (4.2.5) obținem:

$$(4.2.7) \quad |\bar{x} - x_1| \leq \frac{M_2}{2!} |f(x_0)|^2$$

unde

$$M_2 = \sup_{x \in \mathbb{I}} \left| \frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \right|.$$

Ca și metoda coardei, metoda tangentei poate și ea să fie obținută din polinomul lui Taylor de gradul 1, adică aproximând rădăcina ecuației $f(x) = 0$ prin rădăcina ecuației $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$.

Din aceleși motive ca cele expuse în paragraful precedent, formula lui Taylor pentru funcția f când $n > 1$ nu ne conduce, în general, la rezultate bune, vom continua cu cazurile particulare ce decurg din (4.2.4).

2. Cazul $n = 2$. În acest caz dacă folosim (4.2.4) și (2.4.1) obținem metoda lui Cebâșev de ordinul 3, adică:

$$(4.2.8) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)f^2(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

Folosind acum formulele (2.4.2) și (4.2.5) avem:

$$(4.2.9) \quad |\bar{x} - x_1| \leq \frac{M_3}{3!} |f(x_0)|^3$$

unde $M_3 = \sup_{x \in \mathbb{I}} \frac{f'''(x)f'(x) - 3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}$.

3. Cazul $n = 3$. Vom obține metoda lui Cebâșev de ordinul 4, adică:

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)[f(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^3} + \\ &+ \frac{(f'''(x_0)f'(x_0) - 3[f''(x_0)]^2)f^3(x_0)}{3![f'(x_0)]^5}, \end{aligned}$$

cu evaluarea

$$(4.2.11) \quad |\bar{x} - x_1| = \frac{M_4}{4!} |f(x_0)|^4$$

$$\text{unde } M_4 = \sup_{x \in \mathbb{I}} \left| \frac{10f'(x_0)f''(x_0)f'''(x_0) - [f'(x_0)]^2 f^{(4)}(x_0) - 15[f'(x_0)]^3}{(f'(x_0))^7} \right|.$$

Așa cum am procedat până aici se pot obține și celelalte formule de aproximare pentru $n > 3$, dar ele pe măsură ce n crește, se complică tot mai mult și devin greaoaie în calculele numerice.

4.3 Polinomul de interpolare inversă al lui Hermite

Ca și în paragrafele precedente vom presupune că funcția $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ este inversabilă pe intervalul \mathbb{I} și derivabilă pe interiorul intervalului \mathbb{I} până la ordinul $m + 1$ inclusiv.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}; n + 1$ numere naturale care satisfac relația $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$. Considerăm de asemenea $n + 1$ puncte pe intervalul \mathbb{I} pe care le notăm cu x_1, x_2, \dots, x_{n+1} .

Presupunem că pe fiecare punct x_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$ cunoaștem atât valoarea funcției f cât și valorile derivatelor sale pînă la ordinul $a_i - 1$, adică cunoaștem valorile $f(x_i), f'(x_i), \dots, f^{(a_i-1)}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Atunci, dacă ținem cont de rezultatele capitolului 2, noi cunoaștem valorile funcției inverse pe punctele y_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$, unde $y_i = f(x_i)$, precum și derivatele funcției f^{-1} pe aceste puncte. Avem $f^{-1}(y_i) = x_i$, iar derivatele succesive ale lui f^{-1} se calculează cu ajutorul formulei (2.3.1).

Din cele de mai sus și din paragraful 1.8, rezultă că există un polinom de gradul m , $H_m(y)$ care satisface condițiile:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} H_m(y_i) &= f^{-1}(y_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \\ H_m^{(j)}(y_i) &= (f^{-1}(y_i))^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1, \quad j = 1, 2, \dots, a_i - 1 \end{aligned}$$

Conform formulei (1.8.29), polinomul $H_m(y)$ are forma:

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} H_m(y) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} (f^{-1}(y_i))^{(j)} \frac{1}{k! j!} \left[\frac{(y - y_i)^{a_i}}{\omega(y)} \right]_{y=y_i}^{(k)} \frac{\omega(y)}{(y - y_i)^{a_i-j-k}}, \end{aligned}$$

unde cu $\omega(y)$ am notat produsul:

$$(4.3.3) \quad \omega(y) = (y - y_1)^{a_1} (y - y_2)^{a_2} \dots (y - y_{n+1})^{a_{n+1}}.$$

Dacă procedăm ca și în paragrafele precedente, vom obține pentru rădăcina \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, următoarea aproximare:

$$\bar{x} \approx x_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{a_i-1} \sum_{k=0}^{a_i-j-1} [f^{-1}(y_i)]^{(j)} \frac{1}{k! j!} \left[\frac{(y - y_i)^{a_i}}{\omega(y)} \right]_{y=y_i}^{(k)} \frac{(-1)^{a_i-j-k} \cdot \omega(0)}{(y_i)^{a_i-j-k}},$$

cu evaluarea erorii

$$|\bar{x} - x_{n+2}| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |f(x_1)|^{a_1} \cdot |f(x_2)|^{a_2} \dots |f(x_n)|^{a_{n+1}}$$

$$\text{unde } M_{m+1} = \sup_{y \in f(\mathbb{I})} \left| (f^{-1}(y))^{(m+1)} \right|.$$

4.4 Metode iterative de tip interpolator

Considerăm din nou ecuația:

$$(4.4.1) \quad f(x) = 0$$

unde $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ și presupunem că această ecuație are o singură rădăcină $\bar{x} \in \mathbb{I}$ iar funcția f admite o funcție inversă $f^{-1} : f(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{I}$.

Considerăm $n+1$ aproximări ale rădăcinii \bar{x} a lui f , conținute în intervalul \mathbb{I} , fie acestea x_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$, $x_j \neq x_i$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$.

Din formula (4.1.7) obținem o nouă aproximare pentru \bar{x} și anume:

$$(4.4.2) \quad x_{n+2} = -\omega_1(0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{y_i \omega'_1(y_i)}$$

unde prin $\omega_1(y)$ am notat funcția $\omega_1(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)$ iar prin y_i am notat valorile funcției f pentru $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Considerăm în continuare drept aproximare ale rădăcinii \bar{x} numerele x_2, x_3, \dots, x_{n+2} și cu ajutorul loc calculăm o nouă aproximare x_{n+3} astfel:

$$(4.4.3) \quad x_{n+3} = -\omega_2(0) \sum_{i=2}^{n+2} \frac{x_i}{y_i \omega'_2(y_i)}$$

unde cu $\omega_2(y)$ am notat funcția $\omega_2(y) = \prod_{i=2}^{n+2} (y - y_i)$ iar cu $y_i, i = 2, 3, \dots, n+2$ am notat valorile funcției f pentru $x = x_i$.

Presupunem că am calculat aproximatiile $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+k}$ ale lui \bar{x} , atunci aproximarea x_{n+k+1} se calculează astfel:

Notăm cu $\omega_k(y) = \sum_{i=k}^{n+k} (y - y_i)$, unde $y_i, i = k, k+1, \dots, n+k$ sunt valorile funcției f pentru $x = x_i$, atunci avem:

$$(4.4.4) \quad x_{n+k+1} = -\omega_k(0) \sum_{i=k}^{n+k} \frac{x_i}{y_i \omega'_k(y_i)} \quad k = 1, 2, \dots, .$$

În modul descris mai sus, procedeul poate continua indefinit și astfel obținem un sir de aproximării $(x_s)_{s=1}^{\infty}$ ale rădăcinii \bar{x} a ecuației (4.4.1).

Există totuși câteva neajunsuri de care trebuie să ținem cont când calculăm elementele sirului $(x_s)_{s=1}^{\infty}$ și anume:

Atunci când am dedus forma polinomului de interpolare inversă al lui Lagrange, am presupus că valorile $y_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ ale funcției f pentru $x = x_i$ sunt diferite între ele, dar în decursul calculelor, pentru obținerea elementelor sirului $(x_s)_{s=1}^{\infty}$, sistemul de puncte pe care interpolăm se schimbă de la un pas la altul prin scoaterea unui punct din vechiul sistem și adăugarea în locul lui a unui nou punct. Se poate întâmpla ca noul punct adăugat să coincidă cu unul din punctele vechi și atunci, evident, sirul $(x_s)_{s=1}^{\infty}$ începe să devină staționar începând cu pasul amintit, sau se poate întâmpla ca noua aproximare să nu aparțină domeniului de definiție al funcției f .

Asupra acestor neajunsuri nu ne putem pronunța, fără a face ipoteze suplimentare asupra funcției f , și acest lucru îl vom face în capitolele următoare când vom studia, cel puțin în cazuri particulare, convergența sirului $(x_s)_{s=1}^{\infty}$.

Pentru calculul succesiv al elementelor sirului $(x_s)_{s=1}^{\infty}$ cu ajutorul metodei (4.4.4), este necesar să calculăm la fiecare pas k de iterare, atât pe $\omega_k(0)$ cât și valorile funcției $\omega'_k(y)$ pentru $y = y_i, i = k, k+1, \dots, n+k$.

Vom observa pentru calculul practic că există legătură între $\omega_k(0)$ și $\omega_{k+1}(0)$ cât și între $\omega'_k(y_i)$ și $\omega'_{k+1}(y_i)$.

Pentru aceasta avem:

$$\omega_k(y) = \sum_{i=k}^{n+k} (y - y_i)$$

și

$$\omega_{k+1}(y) = \sum_{i=k+1}^{n+k+1} (y - y_i),$$

de unde deducem relația de recurență:

$$(4.4.5) \quad \omega_{k+1}(y) = \frac{\omega_k(y)(y - y_{n+k+1})}{(y - y_k)},$$

de unde deducem relațiile:

$$(4.4.6) \quad \omega_{k+1}(0) = \frac{\omega_k(0)y_{n+k+1}}{y_k}; \quad k = 1, 2, \dots.$$

Tot din (4.4.5) deducem:

$$\omega'_{k+1}(y) = \frac{[\omega'_k(y)(y - y_{n+k+1}) + \omega_k(y)](y - y_k) - \omega_k(y)(y - y_{n+k+1})}{(y - y_k)^2},$$

din care rezultă, pentru calculul valorilor lui $\omega'_{k+1}(y)$, următoarele formule de recurență:

$$(4.4.7) \quad \omega'_{k+1}(y_i) = \begin{cases} \frac{\omega'_k(y_i)(y_i - y_{n+k+1})}{y_i - y_k}, & i = k+1, \dots, k+n; \\ \frac{\omega_k(y_i)}{y_i - y_k}, & i = n+k+1. \end{cases}$$

Relația de recurență (4.4.7) are loc pentru fiecare $k = 1, 2, \dots$.

Algoritmul descris mai sus, ne dă posibilitatea să simplificăm calculele substanțial, mai ales atunci când avem în vedere un număr mare de noduri de interpolare.

Dacă folosim forma baricentrică a polinomului de interpolare inversă al lui Lagrange, atunci din (4.4.3) deducem următorul procedeu iterativ:

$$(4.4.8) \quad x_{n+k+1} = \frac{\sum_{i=k}^{n+k} \frac{x_i}{y_i \omega'_k(y_i)}}{\sum_{i=k}^{n+k} \frac{1}{y_i \omega'_k(y_i)}}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Dăm în continuare câteva cazuri particulare ale metodei de iteratie (4.4.4).

1. Cazul $n = 1$. În acest caz obținem metoda coardei. Această metodă poate fi redată mai clar dacă scriem polinomul de interpolare inversă a lui Lagrange sub forma dată de către Newton, adică cu ajutorul diferențelor divizate.

Formula (4.1.17) ne dă aproximarea x_3 a lui \bar{x} , pornindu-se de la aproximăriile x_1 și x_2 sub forma:

$$(4.4.9) \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{[x_1, x_2; f]}.$$

Dacă iterăm acum succesiv, obținem sirul $(x_s)_{s=1}^{\infty}$ ale cărui elemente sunt date de următoarea metodă iterativă:

$$(4.4.10) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k; f]}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

Am obținut astfel metoda iterativă a coardei. O altă variantă a acestei metode se poate obține păstrând pe x_1 fix și schimbând de fiecare dată același nod de interpolare. Vom obține astfel următoarea metodă iterativă:

$$(4.4.11) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_1, x_k; f]}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

Metoda obținută se numește metoda coardei modificată.

Interpretarea geometrică a metodei (4.4.10) este dată în figura 4.4.1.

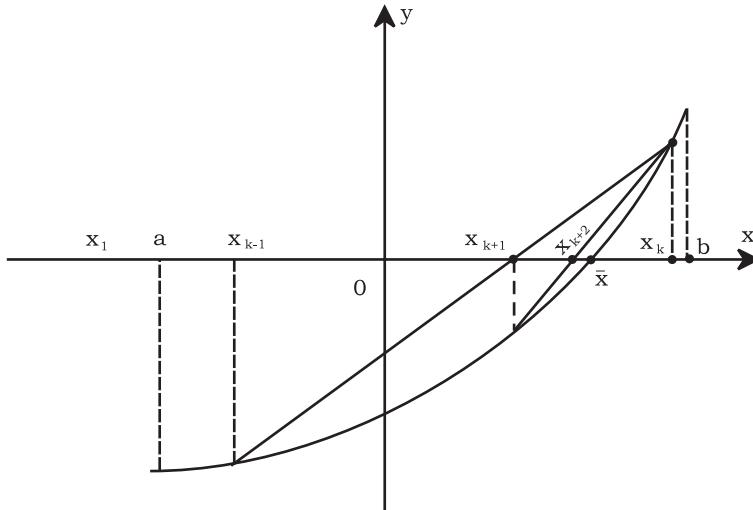


Figura 4.4.1

După cum se vede în figura 4.4.1, dacă x_{k-1} și x_k sunt două aproximări pentru \bar{x} , atunci noua aproximărie x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție, al dreptei ce unește punctele,

$$M_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$$

și

$$M_k(x_k, f(x_k)),$$

cu axa Ox .

În cazul metodei (4.4.11) interpretarea geometrică se găsește în figura 4.4.2.

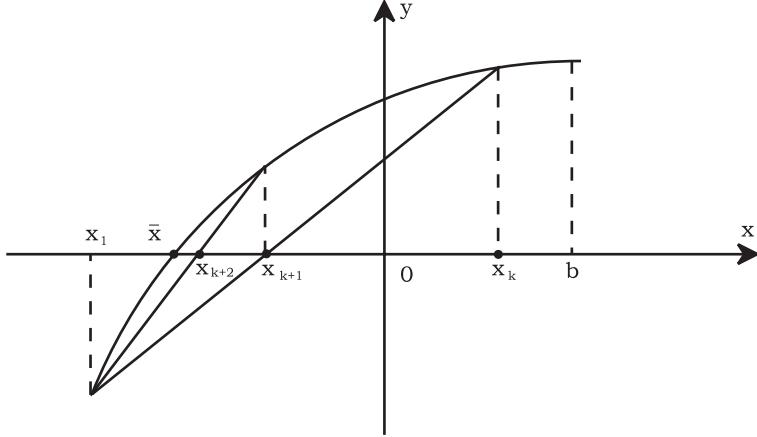


Figura 4.4.2

Aici, x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre dreapta ce unește punctele $M_1(x_1, f(x_1))$ și $M_k(x_k, f(x_k))$ cu axa Ox .

2. Cazul $n = 2$. Acest caz ne conduce la metoda ce poartă numele de analogul metodei lui Cebâșev. Pentru a obține această metodă, pornim de la trei aproximării initiale, x_1, x_2, x_3 ale rădăcinii \bar{x} a ecuației (4.4.1) și din formula polinomului de interpolare inversă al lui Lagrange sub forma lui Newton și de relațiile $[u, v; f^{-1}] = \frac{1}{[x, y; f]}$, respectiv $[u, v, w; f^{-1}] = \frac{-[x, y, z; f]}{[x, y; f][x, z; f][y, z; f]}$ unde $u = f(x)$, $v = f(y)$ și $w = f(z)$, deducem pentru noua aproximăție x_4 următoarea relație

$$(4.4.12) \quad x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{[x_2, x_3; f]} - \frac{[x_1, x_2, x_3; f]f(x_2)f(x_3)}{[x_1, x_2; f][x_1, x_3; f][x_3, x_2; f]}.$$

Obținem apoi analog o nouă aproximăție x_5 dacă pornim de la aproximăriile x_2, x_3 și x_4 , adică:

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{[x_3, x_4; f]} - \frac{[x_2, x_3, x_4; f]f(x_3)f(x_4)}{[x_2, x_3; f][x_2, x_4; f][x_3, x_4; f]}.$$

În general, dacă aproximăriile x_{k-2}, x_{k-1}, x_k , atunci nouă aproximăție x_{k+1} o vom obține astfel:

$$(4.4.13) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k; f]} - \frac{[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k; f]f(x_{k-1})f(x_k)}{[x_{k-2}, x_{k-1}; f][x_{k-2}, x_k; f][x_{k-1}, x_k; f]},$$

$$k = 3, 4, \dots, .$$

Am obținut astfel un sir de aproximății pentru rădăcina \bar{x} a ecuației (4.4.1).

Se poate, și în cazul de factă, obține o metodă modificată dacă de exemplu fixăm aproximarea x_1 iar celelalte aproximății le înlocuim pe rând după regula cunoscută. Obținem atunci următoarea metodă iterativă:

$$(4.4.14) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k; f]} - \frac{[x_1, x_{k-1}, x_k; f]f(x_{k-1})f(x_k)}{[x_1, x_{k-1}; f][x_1, x_k; f][x_{k-1}, x_k; f]}, \\ k = 3, 4, \dots, .$$

Această metodă o vom numi analogul modificat al metodei lui Cebășev.

4.5 Metode iterative de tip Cebășev

Acstea metode sunt generate de polinomul de interpolare inversă al lui Taylor, care a fost expus în cadrul volumului de față în paragraful 4.2.

Vom presupune și aici că sunt îndeplinite ipotezele în care am obținut formula de aproximare (4.2.3). În acest caz, din (4.2.4) obținem prima aproximare x_1 a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$ și anume:

$$(4.5.1) \quad x_1 = x_0 - \frac{[f^{-1}(y_0)]'}{1!} f(x_0) + \dots + (-1)^n \frac{[f^{-1}(y_0)]^{(n)}}{n!} [f(x_0)]^n$$

unde prin $[f^{-1}(y_0)]^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ am notat derivata de ordinul i a funcției inverse f^{-1} , x_0 este aproximarea inițială a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$ și $y_0 = f(x_0)$.

Fie acum x_k o aproximare oarecare a rădăcinii \bar{x} a ecuației în cauză, atunci noua aproximare x_{k+1} o vom obține cu ajutorul formulei:

$$(4.5.2) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{[f^{-1}(y_k)]'}{1!} f(x_k) + \dots + (-1)^n \frac{[f^{-1}(y_k)]^{(n)}}{n!} [f(x_k)]^n, \\ k = 0, 1, \dots, .$$

Tinând cont de expresiile derivatelor succesive ale funcției inverse f^{-1} date în paragraful 2.3., obținem ca și cazuri particulare ale metodei iterative (4.5.2) următoarele metode:

1. Metoda iterativă a lui Newton. Această metodă se obține, aşa cum am văzut în paragraful 4.2., luând doi termeni din (4.5.2), adică:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f^{-1}(y_k)]'}{1!} f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, .$$

Sau dacă ținem cont de faptul că $[f^{-1}(y_k)]' = \frac{1}{f'(x_k)}$ rezultă următoarea metodă iterativă:

$$(4.5.3) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Interpretarea geometrică a acestei metode se găsește în figura 4.5.1.

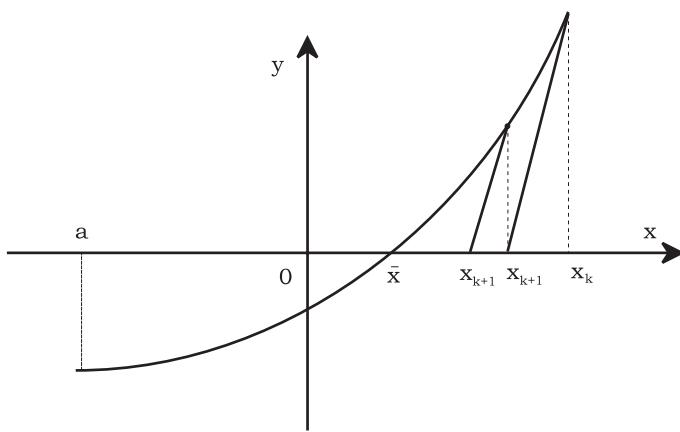


Figura 4.5.1

Din figura 4.5.1 se observă că, dacă este dată aproximația x_k a rădăcinii \bar{x} , atunci aproximația x_{k+1} se obține ca abscisă a punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției $y = f(x)$, dusă în punctul $M(x_k, f(x_k))$, și axa Ox .

Ca și în paragraful precedent, putem obține și aici diferite forme modificate ale metodei lui Newton. Prima formă a metodei amintite, o obținem dacă păstrăm tot timpul în decursul calculelor pentru derivata funcției f aceeași valoare și anume valoarea sa în punctul x_0 . Obținem atunci următoarea metodă iterativă:

$$(4.5.4) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

În calculul practic, această metodă se poate dovedi, de multe ori, a fi foarte utilă, deoarece nu ne mai obligă la calculul valorilor derivatei funcției f pe fiecare element al sirului $(x_s)_{s=0}^{\infty}$. În multe cazuri, sirul obținut cu metoda (4.5.4) este convergent și viteza sa de convergență poate fi destul de rapidă.

O altă modificare a metodei lui Newton se obține dacă ne mărginim să schimbăm valoarea derivatei funcției f , pentru o nouă aproximare a rădăcinii \bar{x} , numai la fiecare doi pași de iterare și anume, obținem următoarea metodă:

$$(4.5.5) \quad y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Putem obține și alte modificări ale metodei lui Newton, dacă de exemplu ne propunem să schimbăm valoarea derivatei funcției f pentru o nouă aproximare a rădăcinii \bar{x} după un set de s pași de iterare $s \geq 2$. Nu ne ocupăm aici de acest caz.

În rezolvarea numerică a ecuațiilor, rezultate bune se pot obține dacă se combină metoda lui Newton cu metoda coardei și anume dacă procedăm în felul următor:

Fie x_0 o aproximare inițială a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$. Cu ajutorul metodei lui Newton, calculăm aproximarea y_1 , adică

$$(4.5.6) \quad y_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Calculăm apoi cu ajutorul metodei coardei, folosind aproximările x_0 și y_0 , aproximarea x_1 cu formula:

$$(4.5.7) \quad x_1 = y_1 - \frac{f(y_1)}{[x_0, y_1; f]}.$$

Presupunem că am calculat aproximarea x_{k-1} a rădăcinii \bar{x} , atunci aproximarea următoare x_k se obține în felul următor:

$$(4.5.8) \quad \begin{cases} y_k &= x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}; \\ x_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{[x_{k-1}, y_k; f]}, \quad k = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Interpretarea geometrică a metodei (4.5.8) se găsește în figura 4.5.2.

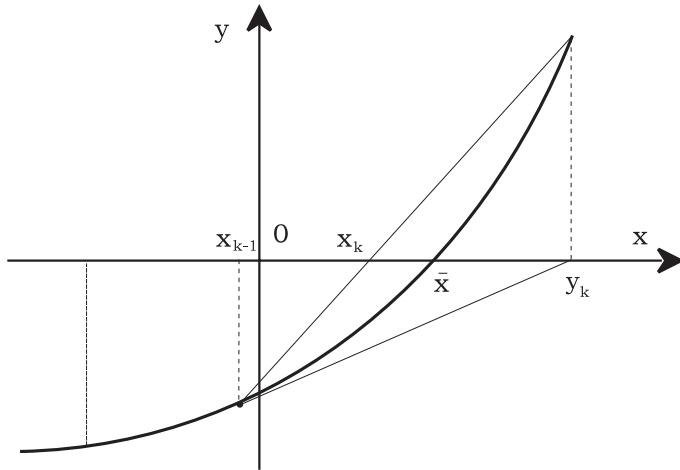


Figura 4.5.2

Metoda lui Newton și metoda coardei se mai pot combina și în alt mod. Fie x_0 și y_0 două aproximății ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, atunci, noua aproximăție x_1 se calculează astfel:

$$\begin{cases} z_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \\ y_1 = y_0 - \frac{f(y_0)}{[x_0, y_0; f]}; \\ x_1 = \frac{y_1 + z_1}{2}. \end{cases}$$

Dacă considerăm acum că x_k și y_k sunt două aproximății de ordin k pentru rădăcina \bar{x} a ecuației în cauză, atunci aproximățiile y_{k+1} și x_{k+1} se calculează astfel:

$$(4.5.9) \quad \begin{cases} z_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\ y_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{[x_k, y_k; f]}; \\ x_{k+1} = \frac{z_{k+1} + y_{k+1}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, . \end{cases}$$

Interpretarea geometrică a metodei (4.5.9) se află în figura 4.5.3.

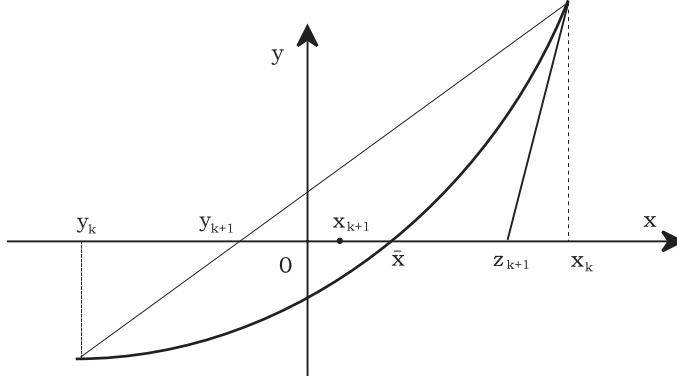


Figura 4.5.3

Metoda coardei și metoda lui Newton se mai pot combina și în alte moduri. Noi nu insistăm aici asupra acestora, lăsând pe seama cititorului să obțină metode noi de rezolvare a ecuațiilor, combinând în diferite moduri cele două metode. Evident, câmp de investigație există, nu numai căutând să obținem metode noi prin combinarea metodei coardei cu metoda lui Newton, ci și prin studiul convergenței sirurilor de aproximare $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ obținute cu ajutorul acestor metode.

2. Metoda lui Cebâșev de ordinul 3. Această metodă se obține din (4.5.2), dacă ne mărginim la primii trei termeni din această formulă și anume:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f^{-1}(y_k)]'}{1!} f(x_k) + \frac{[f^{-1}(y_k)]''}{2!} [f(x_k)]^2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

sau dacă ținem cont de formula (2.4.1) avem:

$$(4.5.10) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)[f(x_k)]^2}{[f'(x_k)]^3}, \quad k = 0, 1, \dots, .$$

3. Metoda lui Cebâșev de ordinul 4. Așa cum am procedat mai sus, de data aceasta vom considera primii patru termeni din formula (4.5.2) și vom avea:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{[f^{-1}(y_k)]'}{1!} f(x_k) + \frac{[f^{-1}(y_k)]''}{2!} [f(x_k)]^2 - \\ &\quad - \frac{[f^{-1}(y_k)]'''}{3!} [f(x_k)]^3, \quad k = 0, 1, \dots, , \end{aligned}$$

de unde, dacă ținem cont de (2.4.1) și (2.4.2), avem:

$$(4.5.11) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)[f(x_k)]^2}{[f'(x_k)]^3} + \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{f'''(x_k)f'(x_k) - 3(f''(x_k))^2}{[f'(x_k)]^5} [f(x_k)]^3, \quad k = 0, 1, \dots, .$$

4.6 Metode iterative de tip Aitken-Steffensen

Metodele iterative de tip interpolator expuse în cadrul paragrafului 4.4 prezintă importanță și din alt punct de vedere și anume ele ne furnizează o altă clasă de metode iterative, care pe lângă faptul că se pot aplica în condiții mult mai generale decât metodele de tip Cebâșev, din cauză că acestea nu impun în mod necesar ipoteze de derivabilitate asupra funcției f , aceste metode, din punctul de vedere al rapidității convergenței, sunt comparabile cu metodele de tip Cebâșev.

Să presupunem că am reușit să punem ecuația:

$$(4.6.1) \quad f(x) = 0,$$

sub următoarea formă echivalentă

$$(4.6.2) \quad g(x) \equiv x - \varphi(x) = 0,$$

unde presupunem că punctele fixe ale funcției φ coincid cu rădăcinile ecuației (4.6.1).

Presupunem că pe intervalul \mathbb{I} funcția f are o funcție inversă și în acest interval este conținută o singură rădăcină \bar{x} a acestei ecuații.

Notăm cu x_0 o aproximare inițială a rădăcinii \bar{x} și construim sirul definit în felul următor:

$$(4.6.3) \quad \begin{cases} x_0^0 &= x_0; \\ x_1^0 &= \varphi(x_0^0); \\ x_2^0 &= \varphi(x_1^0); \\ \dots &\dots \\ x_n^0 &= \varphi(x_{n-1}^0). \end{cases}$$

Folosind acum în polinomul de interpolare inversă, drept noduri de interpolare valorile $y_i^0 = f(x_i^0)$, $i = 0, 1, \dots, n$, putem obține aproximarea următoare a rădăcinii \bar{x} cu formula:

$$x_1 = -\omega_0(0) \sum_{i=0}^n \frac{x_i^0}{y_i^0 \omega'_0(y_i^0)},$$

unde prin $\omega_0(y)$ am notat polinomul $\omega_0(y) = \prod_{j=0}^n (y - y_j^0)$.

Fie acum x_k o aproximare oarecare a rădăcinii \bar{x} a ecuației în cauză, atunci aproximarea x_{k+1} o vom obține în felul următor.

Construim sirul x_i^k , $i = 0, 1, \dots, n$ în felul următor:

$$(4.6.4) \quad \begin{cases} x_0^k &= x_k; \\ x_1^k &= \varphi(x_0^k); \\ x_2^k &= \varphi(x_1^k); \\ \dots &\dots \\ x_n^k &= \varphi(x_{n-1}^k), \end{cases}$$

și notăm cu $y_i^k = f(x_i^k)$, $i = 0, 1, \dots, n$ și cu $\omega_k(y) = \prod_{i=0}^n (y - y_i^k)$, atunci avem:

$$(4.6.5) \quad x_{k+1} = -\omega_k(0) \sum_{i=0}^n \frac{x_i^k}{y_i^k \omega'_k(y_i^k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

sau folosind polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton x_{k+1} se poate reprezenta astfel:

$$(4.6.5a) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_0^k - [y_0^k, y_1^k; f^{-1}] y_0^k + [y_0^k, y_1^k, y_2^k; f^{-1}] y_0^k y_1^k + \dots \\ &\quad + (-1)^n [y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k; f^{-1}] y_0^k y_1^k \dots y_{n-1}^k = \\ &= L(y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k, f^{-1}|0), \quad k = 0, 1, \dots, . \end{aligned}$$

Metoda iterativă obținută mai sus poartă denumirea de metoda generală a lui Aitken-Steffensen.

Semnalăm și aici cazurile particulare ale acestei metode.

1. Cazul $n = 1$. În acest caz, dacă x_0 este aproximarea inițială a rădăcinii \bar{x} a ecuației în cauză, avem:

$$\begin{cases} x_0^0 &= x_0; \\ x_1^0 &= \varphi(x_0^0) = \varphi(x_0); \\ y_0^0 &= g(x_0^0) = x_0 - \varphi(x_0); \\ y_1^0 &= g(x_1^0) = \varphi(x_0) - \varphi(\varphi(x_0)). \end{cases}$$

Folosind în acest caz polinomul de interpolare inversă sub forma lui Newton și considerând în locul lui f din (4.6.1) funcția g din (4.6.2), vom deduce

pentru x_1 următoarea expresie:

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{[x_0, \varphi(x_0); g]},$$

adică

$$x_1 = x_0 - \frac{[x_0 - \varphi(x_0)]^2}{x_0 - 2\varphi(x_0) + \varphi(\varphi(x_0))}.$$

Dacă presupunem acum că am reușit să construim aproximația x_k a rădăcinii \bar{x} , atunci este ușor de văzut că x_{k+1} va avea următoarea formă:

$$(4.6.6) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{[x_k - \varphi(x_k)]^2}{x_k - 2\varphi(x_k) + \varphi(\varphi(x_k))}, \quad k = 0, 1, \dots, .$$

Interpretarea geometrică a metodei (4.6.6) se găsește în figura 4.6.1.

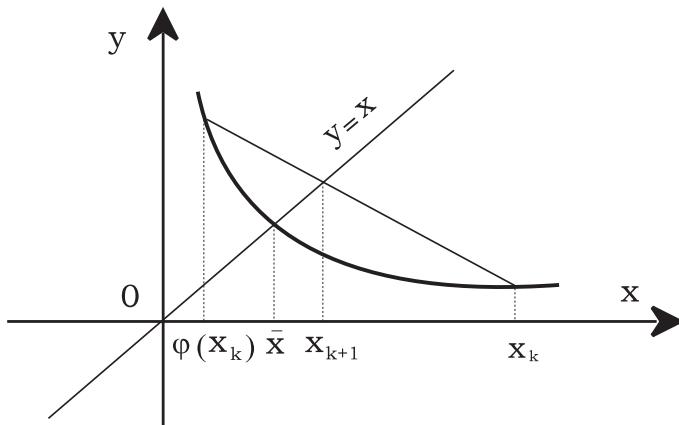


Figura 4.6.1

Din formula (4.6.6) deducem ușor că x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre dreapta $y = x$ și dreapta ce unește punctele $M_k(x_k, \varphi(x_k))$ și $M'_k(\varphi(x_k), \varphi(\varphi(x_k)))$.

Înainte de a trece și la alte cazuri particulare, ne oprim puțin asupra metodei (4.6.6) și arătăm că ea mai poate fi privită și dintr-un alt punct de vedere.

Să presupunem că funcția φ este derivabilă și să notăm cu $a = \varphi'(\bar{x})$. Admitem că $a \neq 1$ și $a \neq 0$ și considerăm funcția:

$$(4.6.7) \quad \varphi^*(x) = \frac{1}{1-a} [\varphi(x) - ax].$$

Se observă că avem:

$$(4.6.8) \quad \varphi^*(\bar{x}) = \frac{1}{1-a} [\varphi(\bar{x}) - a\bar{x}] = \bar{x}$$

și

$$(4.6.9) \quad [\varphi^*(\bar{x})]' = \frac{1}{1-a} [\varphi'(\bar{x}) - a] = 0.$$

Fie acum x_0 și $\varphi(x_0)$ două aproximății ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $x - \varphi(x) = 0$. Atunci putem aproxima derivata funcției φ pe punctul \bar{x} cu diferența divizată a acestei funcții pe punctele x_0 și $\varphi(x_0)$, adică:

$$a \approx \frac{\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0) - x_0}.$$

Înlocuind pe a în (4.6.7) obținem:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi^*(x_0) = \frac{1}{1 - \frac{\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0) - x_0}} \left[\varphi(x_0) - \frac{\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0) - x_0} x_0 \right] = \\ &= \frac{x_0 \varphi(x_0) - [\varphi(x_0)]^2}{\varphi(\varphi(x_0)) - 2\varphi(x_0) + x_0} = x_0 - \frac{[x_0 - \varphi(x_0)]^2}{\varphi(\varphi(x_0)) - 2\varphi(x_0) + x_0} \end{aligned}$$

de unde în general vom obține metoda (4.6.6).

Observația 4.6.1. După cum vom vedea în capitolele următoare, pentru convergența metodei iterative

$$x_{k+1} = \varphi^*(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

este important ca derivata funcției $\varphi^*(x)$ să fie apropiată de zero în vecinătatea punctului fix al funcției φ^* . Din acest punct de vedere, egalitatea (4.6.9) ne arată că metoda (4.6.6) poate da rezultate foarte bune în ceea ce privește convergența sirului de aproximății obținut.

2. Cazul $n = 2$. Dacă notăm iarăși cu x_0 aproximarea inițială a rădăcinii \bar{x} a ecuației în cauză, atunci vom avea:

$$\begin{cases} x_0^0 &= x_0; \\ x_1^0 &= \varphi(x_0^0) = \varphi(x_0); \\ x_2^0 &= \varphi(x_1^0) = \varphi(\varphi(x_0)). \end{cases}$$

Înlocuind în (4.4.12) nodurile de interpolare $x_1 = x_0$, $x_2 = \varphi(x_0)$, $x_3 = \varphi(\varphi(x_0))$ și schimbând $x_4 = x_1$ și $f = g$, vom deduce:

$$(4.6.10) \quad x_1 = \varphi(\varphi(x_0)) - \frac{\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi(\varphi(\varphi(x_0)))}{[\varphi(x_0), \varphi(\varphi(x_0)); g]} - \\ - \frac{[x_0, \varphi(x_0), \varphi(\varphi(x_0)); g] [\varphi(x_0) - \varphi(\varphi(x_0))] [\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi(\varphi(\varphi(x_0)))]}{[x_0, \varphi(x_0); g] [\varphi(x_0), \varphi(\varphi(x_0)); g] [x_0, \varphi(\varphi(x_0)); g]}$$

și în general dacă am calculat aproximarea x_k , atunci o nouă aproximare x_{k+1} se obține astfel:

Calculăm nodurile x_0^k , x_1^k , x_2^k cu ajutorul formulelor

$$\begin{cases} x_0^k &= x_k; \\ x_1^k &= \varphi(x_0^k) = \varphi(x_k); \\ x_2^k &= \varphi(x_1^k) = \varphi(\varphi(x_k)). \end{cases}$$

Procedând acum ca și în cazul formulei (4.6.10) vom obține:

$$(4.6.11) \quad x_{k+1} = \varphi(\varphi(x_k)) - \frac{\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(\varphi(\varphi(x_k)))}{[\varphi(x_k), \varphi(\varphi(x_k)); g]} - \\ - \frac{[x_k, \varphi(x_k), \varphi(\varphi(x_k)); g] [\varphi(x_k) - \varphi(\varphi(x_k))] [\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(\varphi(\varphi(x_k)))]}{[x_k, \varphi(x_k); g] [\varphi(x_k), \varphi(\varphi(x_k)); g] [x_k, \varphi(\varphi(x_k)); g]}, \\ k = 0, 1, \dots.$$

În mod analog, folosind metoda iterativă generală (4.6.5), se pot obține metodele iterative de tip Aitken-Steffensen în cazul $n = 3, n = 4, \dots$

Evident, forma explicită a acestor metode se complică pe măsură ce n crește și de aceea nu insistăm aici asupra acestor cazuri.

Vom indica în continuare un mod de a generaliza metoda (4.6.6).

Evident, procedeul care va fi aplicat aici, se poate extinde și în cazul general.

Considerăm ecuația (4.6.1) și pentru rezolvarea acestei ecuații considerăm următoarele două metode iterative:

$$x_k = \varphi_1(x_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, \\ x_k = \varphi_2(x_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

unde presupunem că punctele fixe ale funcțiilor φ_1 și φ_2 coincid între ele și sunt aceleși cu rădăcinile ecuației (4.6.1).

Notăm cu x_0 o aproximare inițială a rădăcinii x a ecuației (4.6.1) și presupunem că \bar{x} este singura rădăcină a acestei ecuații, dintr-un interval \mathbb{I}

al axei reale. Vom considera atunci drept noduri de interpolare în (4.1.16) numerele $\varphi_1(x_0)$ și $\varphi_2(x_0)$ și vom obține o nouă aproximatie x_1 , astfel:

$$x_1 = \varphi_1(x_0) - \frac{f(\varphi_1(x_0))}{[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0); f]}$$

sau

$$x_1 = \varphi_2(x_0) - \frac{f(\varphi_2(x_0))}{[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0); f]}.$$

Dacă acum notăm cu x_k o aproximatie oarecare a rădăcinii \bar{x} atunci aproximarea următoare x_{k+1} este dată de una din următoarele metode iterative:

$$(4.6.12) \quad x_{k+1} = \varphi_1(x_k) - \frac{f(\varphi_1(x_k))}{[\varphi_1(x_k), \varphi_2(x_k); f]}, \quad k = 0, 1, \dots, .$$

sau

$$(4.6.13) \quad x_{k+1} = \varphi_2(x_k) - \frac{f(\varphi_2(x_k))}{[\varphi_1(x_k), \varphi_2(x_k); f]}, \quad k = 1, 2, \dots, .$$

Metodele iterative (4.6.12) și (4.6.13) ne conduc la același sir de aproximării, dacă elementul inițial x_0 este același pentru ambele. Vom dovedi în continuare afirmația de mai sus. Pentru aceasta notăm cu

$$y = \varphi_1(x) - \frac{f(\varphi_1(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]}$$

$$z = \varphi_2(x) - \frac{f(\varphi_2(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]}$$

și vom dovedi că

$$z = y.$$

Plecând de la relația de recurență pe care o verifică diferențele divizate, avem:

$$\frac{f(\varphi_1(x)) - f(\varphi_2(x))}{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)} = [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]$$

sau

$$\frac{f(\varphi_1(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]} - \frac{f(\varphi_2(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

de unde rezultă:

$$\varphi_2(x) - \frac{f(\varphi_2(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]} = \varphi_1(x) - \frac{f(\varphi_1(x))}{[\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]}$$

adică

$$z = y,$$

ceea ce trebuie să demonstrăm.

Metode iterative de tip Aitken-Steffensen mai pot fi extinse și în alte moduri, dar noi nu insistăm aici asupra lor.

4.7 Metode iterative obținute prin interpolare inversă cu ajutorul funcțiilor raționale de funcții liniare

Fie $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală, unde \mathbb{I} este un interval al axei reale, și x_0, x_1, x_2 trei puncte din intervalul \mathbb{I} .

Considerăm mulțimea funcțiilor $\varphi_{a,b,\alpha,\beta}$ de forma

$$(4.7.1) \quad \varphi(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}$$

unde α, β, a, b sunt parametrii reali care trebuie determinați, cu condiția ca funcția φ să coincidă cu funcția f pe punctele x_0, x_1 și x_2 , adică:

$$(4.7.2) \quad \varphi(x_0) = f(x_0), \varphi(x_1) = f(x_1), \varphi(x_2) = f(x_2).$$

Presupunem că $x_0 \neq x_1, x_1 \neq x_2, x_0 \neq x_2$ și $f(x_0) \neq f(x_1), f(x_0) \neq f(x_2), f(x_1) \neq f(x_2)$. Atunci, dacă scriem condițiile (4.7.2) vom obține următorul sistem:

$$(4.7.3) \quad \begin{cases} \frac{ax_0 + b}{\alpha x_0 + \beta} = f(x_0); \\ \frac{ax_1 + b}{\alpha x_1 + \beta} = f(x_1); \\ \frac{ax_2 + b}{\alpha x_2 + \beta} = f(x_2). \end{cases}$$

Sistemul (4.7.3) conține 4 necunoscute, dintre care 3 sunt esențiale.

Dacă la ecuațiile (4.7.3) adăugăm relația (4.7.1) și eliminăm parametrii a, b, α și β dintre cele 4 relații, obținem egalitatea:

$$(4.7.4) \quad \frac{x - x_1}{x - x_0} : \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_0)},$$

de unde deducem relația:

$$(4.7.5) \quad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} = \frac{[x_1, x_2; f]}{[x_0, x_2; f]} \cdot \frac{x - x_1}{x - x_0}.$$

Verificăm acum, că funcția φ determinată cu formula (4.7.5), verifică condițiile (4.7.2). Pentru $x = x_1$ din (4.7.5) deducem egalitatea $\varphi(x_1) - f(x_1) = 0$ adică $\varphi(x_1) = f(x_1)$. Dacă $x \rightarrow x_0$, tot din (4.7.5) deducem egalitatea $\varphi(x_0) - f(x_0) = 0$, adică $\varphi(x_0) = f(x_0)$.

Pentru $x = x_2$ din (4.7.5) deducem:

$$\frac{\varphi(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - f(x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_0)},$$

de unde avem:

$$\varphi(x_2)[f(x_1) - f(x_0)] = f(x_2)[f(x_1) - f(x_0)],$$

adică

$$\varphi(x_2) = f(x_2).$$

Din (4.7.5) și (4.7.1) deducem valorile parametrilor a, b, α și β date de relațiile:

$$(4.7.6) \quad \begin{cases} a &= f(x_1)[x_0, x_2; f] - f(x_0)[x_1, x_2; f]; \\ b &= x_1 f(x_0)[x_1, x_2; f] - x_0 f(x_1)[x_0, x_2; f]; \\ \alpha &= [x_0, x_2; f] - [x_1, x_2; f]; \\ \beta &= x_1[x_1, x_2; f] - x_0[x_0, x_2; f]. \end{cases}$$

După cum rezultă din (4.7.6) valorile parametrilor a, b, α și β se obțin ușor dacă în prealabil se calculează elementele următorului tabel al diferențelor divizate:

$$(4.7.7) \quad \begin{cases} x_0 & f(x_0) \\ & [x_0, x_2; f] \\ x_2 & f(x_2) \\ & [x_1, x_2; f] \\ x_1 & f(x_1) \end{cases}$$

Pentru scopurile noastre, vom interpola cu ajutorul funcțiilor din familia (4.7.1) funcția inversă a funcției f . Presupunem deci, că pe intervalul \mathbb{I}

funcția f este monotonă și notăm cu y_i valorile acestei funcții pentru $x = x_i$, $i = 0, 1, 2$. Notăm cu f^{-1} inversa funcției f pe intervalul \mathbb{I} și avem:

$$f^{-1}(y_i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Considerăm acum mulțimea funcțiilor $\varphi_{a', b', \alpha', \beta'} : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\beta'}{\alpha'}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ca fiind mulțimea funcțiilor de forma:

$$(4.7.8) \quad \varphi(y) = \frac{a'y + b'}{\alpha'y + \beta'},$$

și punem problema să determinăm acea funcție din familia dată, care pe punctele y_i ia valorile x_i , $i = 0, 1, 2$.

Ținând cont de formulele:

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i, & i = 0, 1, 2; \\ f^{-1}(y_i) = x_i, & i = 0, 1, 2; \\ [y_0, y_2; f^{-1}] = \frac{1}{[x_0, x_2; f]}; \\ [y_1, y_2; f^{-1}] = \frac{1}{[x_1, x_2; f]}, \end{cases}$$

deducem pentru a' , b' , α' și β' următoarele expresii:

$$(4.7.9) \quad \begin{cases} a' = x_1[x_1, x_2; f] - x_0[x_0, x_1; f]; \\ b' = f(x_1)x_0[x_0, x_2; f] - f(x_0)x_1[x_1, x_2; f]; \\ \alpha' = [x_1, x_2; f] - [x_0, x_2; f]; \\ \beta' = f(x_1)[x_0, x_2; f] - f(x_0)[x_1, x_2; f]. \end{cases}$$

Presupunând acum că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină \bar{x} în intervalul \mathbb{I} , atunci avem $f^{-1}(0) = \bar{x}$ și considerând că funcția dată de (4.7.8), unde a' , b' , α' și β' sunt date de formulele (4.7.9), aproximează funcția f^{-1} , vom obține pentru \bar{x} următoarea aproximare:

$$(4.7.10) \quad \bar{x} \approx \varphi(0) = \frac{b'}{\beta'} = \frac{x_0 f(x_1)[x_0, x_2; f] - x_1 f(x_0)[x_1, x_2; f]}{f(x_1)[x_0, x_2; f] - f(x_0)[x_1, x_2; f]}.$$

Folosind formula de aproximare (4.7.10) putem obține în mai multe moduri metode de iterare pentru rezolvarea ecuației $f(x) = 0$.

Un mod de a obține o metodă iterativă este acela ca să păstrăm pe x_0 și x_1 fixi și în cursul iterării să schimbăm de fiecare dată pe x_2 .

Pentru fixarea ideilor, sănotăm cu $a = x_0$, $b = x_1$ și $z_0 = x_2$, atunci din (4.7.10) deducem o primă aproximatie a lui \bar{x} astfel:

$$z_1 = \frac{af(b)[a, z_0; f] - bf(a)[b, z_0; f]}{f(b)[a, z_0; f] - f(a)[b, z_0; f]}$$

și în general:

$$(4.7.11) \quad z_{i+1} = \frac{af(b)[a, z_i; f] - bf(a)[b, z_i; f]}{f(b)[a, z_i; f] - f(a)[b, z_i; f]} \quad i = 1, 2, \dots,$$

Putem acum să dovedim că sirul $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ generat cu metoda iterativă (4.7.11) este convergent și $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, atunci $f(\bar{x}) = 0$. Pentru a dovedi acest fapt presupunem că funcția f este continuă și are loc relația:

$$\frac{f(b)}{f(a)} \neq \frac{[b, \bar{x}; f]}{[a, \bar{x}; f]}.$$

În acest caz, trecând la limită, pentru $i \rightarrow \infty$, în egalitățile (4.7.11) deducem egalitatea:

$$(4.7.12) \quad \bar{x} = \frac{af(b)[a, \bar{x}; f] - bf(a)[b, \bar{x}; f]}{f(b)[a, \bar{x}; f] - f(a)[b, \bar{x}; f]},$$

de unde, prin un calcul elementar se deduce egalitatea $f(\bar{x}) = 0$.

Exemplu numeric. Să se aproximeze rădăcina pozitivă a ecuației:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Aplicând metoda (4.7.12) pentru $a = 1$, $b = 2$ și $z_0 = 1,5$, obținem aproximările $z_1 = 1,411764$; $z_2 = 1,4142286$ care diferă la a cincea zecimală de $\sqrt{2} = 1,4142213\dots$.

O altă metodă iterativă care se poate deduce din (4.7.10) este aceea pentru care păstrăm pe x_0 fix și în decursul iterării schimbăm simultan pe x_1 și x_2 .

Fie deci $x_0 = a$, $x_1 = z_0$, $x_2 = z_1$, atunci din (4.7.10) obținem:

$$z_2 = \frac{af(z_0)[a, z_1; f] - z_0 f(a)[z_0, z_1; f]}{f(z_0)[a, z_1; f] - f(a)[z_0, z_1; f]}$$

și în general obținem sirul $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ generat de următoarea metodă iterativă:

$$(4.7.13) \quad z_{i+1} = \frac{af(z_{i-1})[a, z_i; f] - z_{i-1} f(a)[z_{i-1}, z_i; f]}{f(z_{i-1})[a, z_i; f] - f(a)[z_{i-1}, z_i; f]}, \quad i = 1, 2, \dots$$

pentru care iarăși se dovedește ușor că dacă sirul $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent și $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, atunci $f(\bar{x}) = 0$.

Presupunem în continuare că funcția f este derivabilă pe fiecare punct al intervalului \mathbb{I} și mai presupunem că $x_2 = x_0$. Atunci, $[x_0, x_2; f] = [x_0, x_0; f] = f'(x_0)$ și din (4.7.10) deducem:

$$(4.7.14) \quad \bar{x} \approx \frac{x_0 f(x_1) f'(x_0) - x_1 f(x_0) [x_1, x_0; f]}{f(x_1) f'(x_0) - f(x_0) [x_1, x_0; f]}.$$

Dacă acum notăm $x_0 = a$ și $z_0 = x_1$ obținem din (4.7.14) următoarea aproximare pentru \bar{x} :

$$z_1 = \frac{a f(z_0) f'(a) - z_0 f(a) [z_0, a; f]}{f(z_0) f'(a) - f(a) [z_0, a; f]}$$

sau mergând mai departe obținem sirul $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ generat de următoarea metodă iterativă:

$$z_{i+1} = \frac{a f(z_i) f'(a) - z_i f(a) [z_i, a; f]}{f(z_i) f'(a) - f(a) [z_i, a; f]}, \quad i = 0, 1, \dots, .$$

4.8 Metode iterative obținute cu ajutorul polinomului de interpolare inversă de tip Hermite

Fie $[a, b]$ un interval al axei reale ca în paragraful 4.3 și a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , $n + 1$ numere naturale, astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$. Fie de asemenea $x_i^0 \in [a, b]$, $i = \overline{1, n+1}$, $n + 1$ aproximări ale rădăcinii $\bar{x} \in [a, b]$ a ecuației

$$(4.8.1) \quad f(x) = 0.$$

Presupunem că funcția f admite derivate pe $[a, b]$ până la ordinul $m + 1$ inclusiv. Evident atunci, ținând cont de cele demonstate în paragraful 2.3, funcția f^{-1} (despre care presupunem că există), este derivabilă până la ordinul $m + 1$ pe $[c, d] = f([a, b])$. Folosind polinomul de interpolare inversă al lui Hermite pe nodurile x_i^0 , $i = 1, n + 1$ cu ordinele de multiplicitate, respectiv a_i , $i = 1, n + 1$ și notând cu $x_i^j = f^{-1}(y_i)^{(j)}$, $j = 1, a_i - 1$, $i = \overline{1, n+1}$ valorile funcției f^{-1} pe nodurile de interpolare $y_i = f(x_i^0)$, $i = \overline{1, n+1}$, obținem următoarea aproximare:

$$(4.8.2) \quad x_{n+2}^0 = H(y_1, a_1; y_2, a_2; \dots; y_{n+1}; a_{n+1}; f^{-1}|0)$$

unde H este polinomul de grad m al lui Hermite pe nodurile y_i , $i = \overline{1, n+1}$ cu ordinele de multiplicitate respectiv a_i , $i = \overline{1, n+1}$.

În general dacă se cunosc aproximățiile

$$(4.8.3) \quad x_k^0, x_{k=1}^0, \dots, x_{k+n}^0,$$

aproximația următoare $x_{k+n+1}^{[a,b]}$ se obține astfel:

$$(4.8.4) \quad x_{k+n+1}^0 = H(y_k, a_1; y_{k+1}, a_2; \dots; y_{k+n}; a_{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

H fiind, aşa cum am specificat și mai sus, polinomul lui Hermite de grad cel mult m , cu nodurile $y_{k+j} = f(x_{k+j}^0)$, $j = \overline{0, n}$, cu ordinele de multiplicitate respectiv a_i , $i = 1, n + 1$.

REFERINȚE

În redactarea acestui capitol am folosit lucrările [56], [88], [92], [93], [96], [102], [103], [114], [115], [128] și [145].

Capitolul 5

Convergența metodelor de iterație

În acest capitol vom studia convergența metodelor de iterare semnalate în capitolele anterioare. O atenție deosebită vom acorda evaluării erorilor de aproximare și studiul stabilității numerice. De asemenea vom expune rezultate privind ordinul de convergență al sirurilor ce se obțin din metodele de iterare studiate. În atenția noastră va sta și studiul eficienței calculului.

5.1 Ordin de convergență și indice de eficiență

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale. Presupunem că sirul x_n este convergent și notăm cu $\bar{x} = \lim x_n$.

Definiția 5.1.1. Spunem că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență $r \in \mathbb{R}; r > 0$, dacă există $n' \in \mathbb{N}$ și $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, constante independente de n , astfel încât au loc inegalitățile

$$(5.1.1) \quad k_0 |x_n - \bar{x}|^r \leq |x_{n+1} - \bar{x}| \leq k_1 |x_n - \bar{x}|^r ,$$

pentru orice $n > n'$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.1.1. Dacă sirul x_n are ordinul de convergență $r \in \mathbb{R}, r > 0$, atunci are loc relația

$$(5.1.2) \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|} .$$

Demonstrație. Din (5.1.1), pentru $n > n'$, deducem:

$$(5.1.3) \quad \ln k_0 + r \ln |x_n - \bar{x}| \leq \ln |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \ln k_1 + r \ln |x_n - \bar{x}|.$$

Deoarece $\lim |x_n - \bar{x}| = 0$, rezultă că există $n'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n > n''$ $\ln |x_n - \bar{x}| < 0$ și deci din (5.1.3) rezultă

$$\frac{\ln k_0}{\ln |x_n - \bar{x}|} + r \geq \frac{\ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|} \geq r + \frac{\ln k_1}{\ln |x_n - \bar{x}|}, \quad n > n''$$

de unde trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$ obținem (5.1.2), ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 5.1.1. Arătăm în cele ce urmează că nu orice sir convergent posedă un ordin de convergență.

Pentru aceasta, fie de exemplu sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ai cărui termeni sunt dați de egalitățile:

$$(5.1.4) \quad x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad x_{2k} = \frac{1}{(k+1)^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Evident, $\lim x_n = 0$. Presupunem că acest sir are ordinul r , $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Din inegalitatea (5.1.1) rezultă că există $n' \in \mathbb{N}$ astfel încât în mod necesar au loc inegalitățile

$$k_0 \leq \frac{|x_{n+1} - \bar{x}_n|}{|x_n - \bar{x}|^r} \leq k_1, \quad n > n'$$

adică sirul $(\delta_n)_{n \geq 0}$, unde $\delta_n = \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^r}$ trebuie, în mod necesar, să fie mărginit.

Pentru sirul (5.1.4) avem:

$$\delta_{2k} = \frac{x_{2k+1}}{x_{2k}^r} = \frac{(k+1)^{kr}}{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

care este un subșir al sirului (δ_n) , dar care nu este mărginit și deci sirul (5.1.4) nu are ordin de convergență.

Următoarea teoremă se referă la unicitatea ordinului de convergență.

Teorema 5.1.2. Dacă sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, atunci r este unic.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are cel puțin 2 ordine de convergență $p, r \in \mathbb{R}$ $p > 0, r > 0$ și $r \neq p$. Conform Definiției 5.1.1 există $n', n'' \in \mathbb{N}$ și constantele pozitive $k_0, k_1, k'_0, k'_1 \in \mathbb{R}$ independente de n astfel încât au loc relațiile

$$(5.1.5) \quad k_0|x_n - \bar{x}|^r \leq |x_{n+1} - \bar{x}| \leq k_1|x_n - \bar{x}|^r,$$

pentru orice $n > n'$ și

$$(5.1.6) \quad k'_0|x_n - \bar{x}|^p \leq |x_{n+1} - \bar{x}| \leq k_1|x_n - \bar{x}|^p,$$

pentru $n > n''$.

Pentru $n > \max\{n', n''\}$ sunt satisfăcute simultan ambele relații (5.1.5) și (5.1.6).

Din (5.1.5) și (5.1.6) deducem:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \bar{x}| &\leq k_1|x_n - \bar{x}|^r = k_1|x_n - \bar{x}|^{r-p}|x_n - \bar{x}|^p \leq \\ &\leq \frac{k_1}{k'_0}|x_{n+1} - \bar{x}| |x_n - \bar{x}|^{r-p} \end{aligned}$$

adică

$$(5.1.7) \quad 1 \leq \frac{k_1}{k'_0} |x_n - \bar{x}|^{r-p}.$$

Analog din aceeași relații deducem:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \bar{x}| &\leq k'_1|x_n - \bar{x}|^p = k'_1|x_n - \bar{x}|^{p-r}|x_n - \bar{x}|^r \\ &\leq \frac{k'_1}{k_0}|x_{n+1} - \bar{x}| |x_n - \bar{x}|^{p-r} \end{aligned}$$

din care rezultă

$$(5.1.8) \quad 1 \leq \frac{k'_1}{k_0} |x_n - \bar{x}|^{p-r}.$$

Dacă $r > p$ prin trecere la limită din (5.1.7) rezultă $1 \leq 0$ iar dacă $r < p$ din (5.1.8) rezultă aceeași relație, ceea ce este absurd. Cu aceasta teorema este demonstrată.

În cele ce urmează ne vom ocupa cu compararea vitezelor de convergență a două siruri convergente care au limită comună.

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două siruri convergente pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{x}$.

Definiția 5.1.2. Spunem că sirul $(y_n)_{n \geq 0}$ converge cel puțin așa de rapid ca sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dacă există $n' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > n'$ să fie verificate relațiile:

$$|y_n - \bar{x}| \leq k|x_n - \bar{x}|$$

unde k este o constantă pozitivă, independentă de n .

Definiția 5.1.3. Spunem că sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ au aceeași viteză de convergență dacă există $n' \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n > n'$ au loc relațiile

$$k_0|x_n - \bar{x}| \leq |y_n - \bar{x}| \leq k_1|x_n - \bar{x}|,$$

unde $k_0, k_1 \in \mathbb{R}_+$ sunt constante independente de n .

Următoarea teoremă ne face legătura între ordinele de convergență a două siruri și vitezele lor de convergență.

Teorema 5.1.3. Dacă sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ au aceeași viteză de convergență și dacă în plus unul din cele 2 siruri are un ordin de convergență, atunci și celălalt sir are ordin de convergență și ordinele celor 2 siruri sunt egale.

Demonstratie. Notăm cu r ordinul de convergență a sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și din ipoteza egalității vitezelor de convergență a celor două siruri rezultă că există k''_0 și k''_1 constante reale, independente de n și $n' \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(5.1.9) \quad k''_0|x_n - \bar{x}| \leq |y_n - \bar{x}| \leq k''_1|x_n - \bar{x}|$$

pentru orice $n > n'$ și de asemenea există $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ constante pozitive și $n'' \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n > n''$ au loc relațiile:

$$(5.1.10) \quad k_0|x_n - \bar{x}|^r \leq |x_{n+1} - \bar{x}| \leq k_1|x_n - \bar{x}|^r.$$

Din (5.1.9) și (5.1.10) deducem relațiile

$$|y_{n+1} - \bar{x}| \geq k''_0|x_{n+1} - \bar{x}| \geq k''_0k_0|x_n - \bar{x}|^r \geq \frac{k''_0k_0}{(k''_r)^r} |y_n - \bar{x}|^r$$

și

$$|y_{n+1} - \bar{x}| \leq k''_1|x_{n+1} - \bar{x}| \leq k''_1k_1|x_n - \bar{x}|^r \leq \frac{k''_1k_1}{(k''_0)^r} |y_n - \bar{x}|^r$$

adică pentru $n > \max\{n', n''\}$ au loc relațiile:

$$\frac{k''_0k_0}{(k''_1)^r} |y_n - \bar{x}|^r \leq |y_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{k''_1k_1}{(k''_0)^r} |y_n - \bar{x}|^r,$$

care ne arată că sirul $(y_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență r , ceea ce trebuia demonstrat.

În cele ce urmează vom avea în vedere noțiunile studiate până aici, în acest paragraf, în legătură cu rezolvarea ecuațiilor de forma:

$$(5.1.11) \quad f(x) = 0$$

unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale. Vom avea în vedere aproximarea rădăcinilor ecuației (5.1.11) cu elementele unor siruri reale $(x_n)_{n \geq 0}$, generate de metode de iterare de forma

$$(5.1.12) \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

unde $g : I \rightarrow I$ este o funcție ce depinde evident de f , prin faptul că orice rădăcină a lui f este punct fix al lui g și reciproc, orice punct fix al lui g este rădăcină pentru f .

Mai general, dacă $G : I^k \rightarrow I$ este o funcție de k variabile a cărei restricție la diagonala mulțimii I^k coincide cu g , adică are loc relația

$$G(x, x, \dots, x) = g(x),$$

pentru orice $x \in I$, atunci putem considera siruri $(x_n)_{n \geq 0}$, este generat de așa numita metodă cu mai mulți pași, adică

$$(5.1.13) \quad x_{s+k} = G(x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+k-1}), \quad x_0, \dots, x_{k-1} \in I, \quad s = 0, 1, \dots.$$

Ordinul de convergență al sirului generat de (5.1.12) respectiv (5.1.13) depinde de anumite proprietăți ale funcțiilor f, g respectiv f, G .

Pentru siruri generate de relația (5.1.12) sau (5.1.13), vom folosi o noțiune mai slabă decât cea dată de Definiția 5.1.1 privind ordinul de convergență. *Pentru aceasta presupunem că oricare din sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, generate de (5.1.12) sau (5.1.13), este convergent și limita lor \bar{x} este rădăcină a ecuației (5.1.11).*

Definiția 5.1.4. *Sirul $(x_p)_{p \geq 0}$ generat de (5.1.12) sau (5.1.13) are ordinul de convergență $r \geq 1$ dacă există limită:*

$$(5.1.14) \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_{p+1} - \bar{x}|}{\ln |x_p - \bar{x}|}$$

și $\alpha = r$.

În cele ce urmează, asupra funcțiilor f și g vom face următoarele ipoteze:

i. dacă $x \in I$ atunci $g(x) \in I$;

ii. există $\lim x_p = \bar{x}$, unde $(x_p)_{p \geq 0}$ este generat de (5.1.12);

iii. f este derivabilă în \bar{x} ;

iv. pentru orice $x, y \in I$ are loc relația $0 < |[x, y; f]| < m$

unde $m > 0$, $m \in \mathbb{R}$, unde $[x, y; f]$ este diferența divizată de ordinul 1 a funcției f pe punctele x și y .

Relativ la Definiția 5.1.4 are loc următoarea teoremă.

Teorema 5.1.4. Dacă funcțiile f și g verifică ipotezele i - iv, atunci condiția necesară și suficientă ca sirul $(x_p)_{p \geq 0}$ generat de (5.1.12) să posede ordinul de convergență $r \geq 1$, este să existe

$$(5.1.15) \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x_{n+1})|}{\ln |f(x_n)|}$$

și $\beta = r$.

Demonstrație. Egalitatea între α și β date de (5.1.14) respectiv (5.1.15) rezultă după cum urmează

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x_{n+1})| - \ln |f(x_n)| + \ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |f(x_n)| - \ln |f(x_n)| + \ln |x_n - \bar{x}|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x_{n+1})| - \ln |[\bar{x}, x_{n+1}; f]|}{\ln |f(x_n)| - \ln |[\bar{x}, x_n; f]|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x_{n+1})|}{\ln |f(x_n)|} \frac{1 - \frac{\ln |[\bar{x}, x_{n+1}; f]|}{\ln |f(x_{n+1})|}}{1 - \frac{\ln |[\bar{x}, x_n; f]|}{\ln |f(x_n)|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x_{n+1})|}{\ln |f(x_n)|} = \beta. \end{aligned}$$

Aici am ținut cont de faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = 0$ și de ipotezele i - iv.

Următoarea teoremă se referă la ordinul de convergență al metodelor de tipul (5.1.13).

Teorema 5.1.5. Dacă $(u_p)_{p \geq 0}$ este un sir de numere reale, pozitive care verifică următoarele proprietăți:

i. sirul $(u_p)_{p \geq 0}$ este convergent și $\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = 0$;

ii. există numerele reale nenegative $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ și un sir $(c_p)_{p \geq 0}$, $c_p > 0$ pentru orice $p = 0, 1, \dots$, și $0 < \inf\{c_p\} \leq \sup\{c_p\} \leq m$, unde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, astfel încât au loc egalitățile

$$(5.1.16) \quad u_{s+n+1} = c_s u_s^{\alpha_1} u_{s+1}^{\alpha_2} \cdots u_{s+n}^{\alpha_{n+1}}, \quad s = 0, 1, \dots;$$

$$\text{iii. există } \lim \frac{\ln u_{n+1}}{\ln u_n} = \omega > 0,$$

atunci ω este rădăcina pozitivă a ecuației

$$(5.1.17) \quad P(t) = t^{n+1} - \alpha_{n+1}t^n - \alpha_n t^{n-1} - \cdots - \alpha_2 t - \alpha_1 = 0.$$

Demonstratie. Din (5.1.16) obținem:

$$(5.1.18) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln u_{s+n+1}}{\ln u_{n+s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln c_s}{\ln u_{n+s}} + \sum_{i=0}^n \alpha_{i+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_{s+i}}{\ln u_{n+s}}$$

Dar au loc relațiile:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln c_s}{\ln u_{n+s}} = 0$$

și

$$\lim \frac{\ln u_{s+i}}{\ln u_{n+s}} = \frac{1}{\omega^{n-i}}, \quad i = \overline{0, n},$$

care înlocuite în (5.1.18) ne conduc la relația:

$$\omega^{n+1} - \sum_{i=0}^n \alpha_{i+1} \omega^i = 0,$$

adică ω verifică ecuația (5.1.17).

În cele ce urmează vom expune câteva proprietăți legate de rădăcinile ecuației (5.1.17).

Teorema 5.1.6. *Dacă coeficienții α_i , $i = \overline{1, n+1}$ ai ecuației (5.1.17) sunt nenegativi și există cel puțin un coeficient pozitiv, atunci ecuația admite o singură rădăcină pozitivă.*

Demonstratie. Fie $\alpha_k \neq 0$ și $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$, atunci considerăm ecuația $Q(t) = \frac{P(t)}{t^{k-1}} = t^{n-k+2} - \alpha_{n+1}t^{n-k+1} - \cdots - \alpha_{k+1}t - \alpha_k$. De aici deducem $Q(0) = -\alpha_k < 0$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(t) = +\infty$, adică ecuația $Q(t) = 0$ are cel puțin o rădăcină pozitivă.

Arătăm că această rădăcină este unică. Pentru aceasta, în Q facem schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{u}$ și obținem

$$\begin{aligned} H(u) &= Q\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^{n-k+2}} \left[\alpha_k u^{n-k+2} + \alpha_{k+1} u^{n-k+1} + \cdots + \alpha_{n+1} u - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{u^{n-k+2}} R(u). \end{aligned}$$

Observăm imediat că $R'(u) > 0$ pentru $u > 0$ și deci $R(u)$ are o singură rădăcină pozitivă, ceea ce atrage după sine, ținând cont de cele de mai sus, că ecuația $P(t) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă.

O margine inferioară pentru rădăcina pozitivă a ecuației (5.1.17) este dată de următoarea teoremă:

Teorema 5.1.7. *Dacă există cel puțin un i ; $1 \leq i \leq n+1$ pentru care $\alpha_i > 0$ în ecuația (5.1.17) și $\alpha_j \geq 0$ pentru orice $j = \overline{1, n+1}$, atunci rădăcina pozitivă \bar{t} a ecuației în cauză verifică relația*

$$(5.1.19) \quad \bar{t} \geq \tau = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right)^p$$

unde

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)\alpha_i}.$$

Demonstratie. Pentru a dovedi teorema în cauză, dacă ținem cont de Teorema 5.1.6, este suficient să arătăm că $P(\tau) \leq 0$. Pentru aceasta vom folosi inegalitatea mediilor:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n+1} (a_i)^{p_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i}}, \quad p_i \geq 0, \quad a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1},$$

cu cel puțin un i pentru care $p_i > 0$.

Aplicând inegalitatea de mai sus deducem

$$P(\tau) = \tau^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau^{i-1} \right) = \tau^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right) \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i},$$

dar conform inegalității mediilor ponderate avem:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n+1} \tau^{(i-1)\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}}$$

Dacă ținem cont de această inegalitate avem

$$\begin{aligned} P(\tau) &\leq \tau^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right) \left(\prod_{i=1}^{n+1} \tau^{(i-1)\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}} = \\ &= \tau^{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right) \tau^{\frac{\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{dacă } \tau = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right)^p, \text{ unde } p = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)\alpha_i}.$$

Tinând cont că $P(\tau) < 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = +\infty$ și de faptul că ecuația $P(t) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă, rezultă concluzia teoremei.

Este ușor de văzut că pentru marginea superioară a rădăcinii \bar{t} a ecuației (5.1.17) are loc relația

$$(5.1.20) \quad \bar{t} \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n+1} \{\alpha_i\}.$$

Observația 5.1.2. Inegalitatea (5.1.19) se mai poate scrie

$$(5.1.21) \quad \bar{t} \geq \tau = [1 - P(1)]^{\frac{1-P(1)}{(n+1)-P'(1)}}$$

unde cu $P'(1)$ am notat valoarea derivatei lui P în punctul $t = 1$.

Considerăm în continuare cazul particular al ecuației (5.1.17) când $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = q$, $q \geq 1$, adică vom considera ecuația:

$$(5.1.22) \quad t^{n+1} - qt^n - qt^{n-1} - \dots - q^t - q = 0$$

Dacă notăm cu $\delta_{n+1}(q)$ rădăcina pozitivă a acestei ecuații, atunci următoarele proprietăți se dovedesc fără dificultate.

- a) $\delta_n(q) \leq \delta_{n+1}(q)$, $n = 1, 2, \dots$;

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \max \left\{ q, \frac{n+1}{n+2}(q+1) \right\} \leq \delta_{n+1}(q) \leq q+1; \\ \text{c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(q) = q+1. \end{aligned}$$

În particular pentru $q = 1$ din a) - c) deducem:

$$\begin{aligned} \text{a')} \quad & \delta_n(1) \leq \delta_{n+1}(1) \\ \text{b')} \quad & \frac{2(n+1)}{n+2} \leq \delta_{n+1}(1) < 2 \\ \text{c')} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(1) = 2. \end{aligned}$$

Fie acum $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, n+1}$, despre care presupunem că verifică relațiile:

$$(5.1.23) \quad a_{n+1} \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$$

și

$$(5.1.24) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 1.$$

Considerăm ecuațiile:

$$(5.1.25) \quad p(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_nt^{n-1} - \dots - a_2t - a_1 = 0$$

$$(5.1.26) \quad q(t) = t^{n+1} - a_1t^n - a_2t^{n-1} - \dots - a_nt - a_{n+1} = 0$$

și

$$(5.1.27) \quad h(t) = t^{n+1} - a_{i_1}t^n - a_{i_2}t^{n-1} - \dots - a_{i_n}t - a_{i_{n+1}} = 0$$

unde $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ este o permutare arbitrară a numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$. Fie a rădăcina pozitivă a ecuației (5.1.25), b rădăcina pozitivă a ecuației (5.1.26) și c rădăcina pozitivă a ecuației (5.1.27). Inegalitatea (5.1.24) ne asigură că rădăcinile pozitive ale ecuațiilor (5.1.25) - (5.1.27) sunt supravîntăre. Are loc următoarea teoremă

Teorema 5.1.8. *Dacă coeficienții ecuațiilor (5.1.26) - (5.1.28) verifică relațiile (5.1.23) și (5.1.24), atunci rădăcinile pozitive a , b și c ale acestor ecuații verifică relația*

$$(5.1.28) \quad 1 < b \leq c \leq a$$

Această teoremă ne spune că dintre toate ecuațiile de forma (5.1.27), ecuația (5.1.26) are cea mai mică rădăcină pozitivă iar ecuația (5.1.25) are cea mai mare rădăcină pozitivă.

Demonstrație. Pentru a dovedi teorema enunțată este suficient să arătăm că $h(b) \leq 0$ și $h(a) \geq 0$. Deoarece $q(b) = 0$ avem:

$$\begin{aligned} h(b) &= h(b) - q(b) = (a_1 - a_{i_1})b^n + (a_2 - a_{i_2})b^{n-1} + \dots \\ &+ (a_n - a_{i_n})b + (a_{n+1} - a_{i_{n+1}}) = \\ &= (b-1)(a_1 - a_{i_1})b^{n-1} + (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2})b^{n-2} + \dots \\ &+ (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_{n-1}}, b + \dots \\ &+ (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_n}). \end{aligned}$$

În relația de mai sus, dacă ținem cont că $b > 1$ și pentru orice $s = 1, 2, \dots, n$ au loc relațiile

$$a_1 + a_2 + \dots + a_s - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_s} \leq 0,$$

atunci este clar că $h(b) \leq 0$. Analog arătăm că $h(a) \geq 0$ și teorema este demonstrată.

Pentru studiul convergenței metodelor de iterare de tip Aitken-Steffensen ne va fi utilă următoarea teoremă:

Teorema 5.1.9. Fie $p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ unde $p_i \geq 1$, $\alpha_i \geq 1$, $i = \overline{1, n+1}$, care verifică relațiile

$$(5.1.29) \quad p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n+1}, \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n+1}.$$

Atunci dintre toate numerele de forma:

$$(5.1.30) \quad \alpha = \alpha_{j_1}p_{k_1} + \alpha_{j_2}p_{k_1}p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}}p_{k_1}p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}}$$

unde $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ și $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$ sunt permutări arbitrarе ale numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$, cel mai mare este numărul

$$(5.1.31) \quad \alpha_{\max} = \alpha_1p_1 + \alpha_2p_1p_2 + \dots + \alpha_{n+1}p_1p_2 \dots p_{n+1}.$$

Demonstrație. Din (5.1.29) rezultă relația:

$$(5.1.32) \quad \begin{aligned} \alpha_{j_1}p_1 + \alpha_{j_2}p_1p_2 + \dots + \alpha_{j_{n+1}}p_1p_2 \dots p_{n+1} &\geq \\ \alpha_{j_1}p_{k_1} + \alpha_{j_2}p_{k_1}p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}}p_{k_1}p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}}, \end{aligned}$$

pentru orice permutare $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ și $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$.

Introducem următoarele notății:

$$(5.1.33) \quad b_i = p_1p_2 \dots p_i, \quad i = \overline{1, n+1}$$

Cu notația de mai sus vom arăta că are loc relația:

$$(5.1.34) \quad \alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \cdots + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_{n+1} b_{n+1}$$

pentru orice permutare $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$. Pentru aceasta vom proceda prin inducție. Pentru $n = 0$ proprietatea este evidentă deoarece $\alpha_{j_1} = \alpha_1$.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru n perechi de numere (α_1, b_1) $(\alpha_2, b_2) \dots (\alpha_n, b_n)$, adică are loc relația:

$$(5.1.35) \quad \alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \cdots + \alpha_{j_n} b_n \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

pentru orice $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \cdots \leq \alpha_n$ și $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots \leq b_n$.

Observăm că au loc relațiile

$$b_2 - b_1 \leq b_3 - b_1 \leq \cdots \leq b_{n+1} - b_1$$

și, deoarece $\alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_{n+1}$, atunci din (5.1.35) deducem relația

$$(5.1.36) \quad \begin{aligned} \alpha_{j_2}(b_2 - b_1) + \alpha_{j_3}(b_3 - b_1) + \cdots + \alpha_{j_{n+1}}(b_{n+1} - b_1) &\leq \\ \alpha_2(b_2 - b_1) + \alpha_3(b_3 - b_1) + \cdots + \alpha_{n+1}(b_{n+1} - b_1) & \end{aligned}$$

Pentru fixarea ideilor să presupunem că $j_1 = i$. Folosind (5.1.36) avem

$$\begin{aligned} \alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \cdots + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} &= b_1(\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_n}) + \\ &+ (b_2 - b_1)\alpha_{j_2} + (b_3 - b_1)\alpha_{j_3} + \cdots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{j_{n+1}} \leq \\ &\leq b_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}) + (b_2 - b_1)\alpha_1 + (b_3 - b_1)\alpha_2 + \cdots \\ &+ (b_i - b_1)\alpha_{i-1} + (b_{i+1} - b_1)\alpha_{i+1} + \cdots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{n+1} \leq \\ &\leq b_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}) + (b_2 - b_1)\alpha_2 + (b_3 - b_1)\alpha_3 + \cdots \\ &+ (b_i - b_1)\alpha_i + (b_{i+1} - b_1)\alpha_{i+1} + \cdots + (b_{n+1} - b_1)\alpha_{n+1} = \\ &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_{n+1}\alpha_{n+1}, \end{aligned}$$

cea ce trebuia demonstrat.

În realizarea practică a sirurilor generate de procedee de forma (5.1.12) respectiv (5.1.13), pentru a obține un element din sirul în cauză, este necesar un volum de calcule care depinde, pe de o parte de ordinul de convergență al sirului generat de metoda folosită, iar pe de altă parte de numărul de operații elementare ce se execută pentru a trece de la un pas de iterare la următorul. Dacă în ceea ce privește ordinul de convergență, în cele mai multe cazuri, el poate fi stabilit cu precizie, numărul operațiilor elementare necesare depinde de foarte mulți factori și din acest motiv nu poate fi stabilit cu precizie.

Pentru a simplifica această problemă, s-a propus să se ia în considerare numărul de valori de funcții ce trebuie calculate pentru a trece la un pas $n \in \mathbb{N}$ la pasul $n + 1$.

Notăm cu m_n numărul de valori de funcții ce trebuie calculate pentru a trece în (5.1.12) respectiv (5.1.13), de la pasul de iterare n la pasul $n + 1$. Vom introduce în cele ce urmează, notiunea de indice de eficiență.

Presupunem că sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ generate de (5.1.12) respectiv (5.1.13) sunt convergente și notăm $\lim x_n = \bar{x}$, unde evident \bar{x} este rădăcină a ecuației (5.1.11).

Definiția 5.1.5. Numărul real E se numește indice de eficiență al metodei (5.1.12) respectiv (5.1.13) dacă există

$$(5.1.37) \quad L = \lim \left(\frac{\ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|} \right)^{\frac{1}{m_n}}$$

și $L = E$.

Dacă ținem cont de Teorema 5.1.4, atunci are loc

Teorema 5.1.10. Dacă sunt verificate ipotezele Teoremei 5.1.4, atunci condiția necesară și suficientă ca metoda (5.1.12) respectiv (5.1.13) să aibă indice de eficiență E , este ca să existe

$$(5.1.38) \quad L_1 = \lim \left(\frac{\ln |f(x_{n+1})|}{\ln |f(x_n)|} \right)^{\frac{1}{m_n}}$$

și $L_1 = E$.

Observația 5.1.3. Dacă există

$$\omega = \lim \frac{\ln |x_{n+1} - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|} = \lim \frac{\ln |f(x_{n+1})|}{\ln |f(x_n)|}$$

și presupunem că $m_n = r$, pentru orice $n = 0, 1, \dots$, atunci are loc egalitatea

$$(5.1.39) \quad E = \omega^{\frac{1}{r}}.$$

5.2 Convergența metodei iterative cu un singur pas

Considerăm ecuația

$$(5.2.1) \quad f(x) = 0$$

unde $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, este o funcție, $\mathbb{I} = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Presupunem că ecuației (5.2.1) îi putem pune în corespondență o funcție $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ astfel încât ecuația (5.2.1) să fie echivalentă cu ecuația:

$$(5.2.2) \quad x - \varphi(x) = 0.$$

Cu ajutorul funcției φ construim următorul sir de iterării:

$$(5.2.3) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in \mathbb{I}, \quad n = 0, 1, \dots, .$$

În ceea ce privește convergența sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.2.3) are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.2.1. *Dacă funcția φ verifică următoarele proprietăți*

i. pentru orice $x \in \mathbb{I}$, $\varphi(x) \in \mathbb{I}$;

ii. există $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, astfel încât pentru orice $u_1, u_2 \in \mathbb{I}$, are loc relația

$$(5.2.4) \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq q|u_1 - u_2|,$$

atunci pentru orice $x_0 \in \mathbb{I}$, sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.2.3) este convergent, $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ este rădăcină a ecuației (5.2.1), \bar{x} este unică rădăcină din \mathbb{I} a ecuației (5.2.1) și au loc relațiile:

$$(5.2.5) \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad n = 0, 1, \dots$$

și

$$(5.2.6) \quad |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q} |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Demonstrație. Fie x_s și x_{s+1} două elemente din sirul generat de (5.2.3). Din i. rezultă că $x_s, x_{s+1} \in \mathbb{I}$ și aplicând ii. rezultă relația

$$|x_{s+1} - x_s| \leq q|x_s - x_{s-1}|, \quad s = 1, 2, \dots, x_0 \in \mathbb{I}.$$

Aplicând această inegalitate succesiv vom avea:

$$(5.2.7) \quad |x_{s+1} - x_s| \leq q^s |x_1 - x_0|, \quad s = 1, 2, \dots.$$

Din relațiile de mai sus deducem:

$$(5.2.8) \quad |x_{s+p} - x_s| \leq (q^s + q^{s+1} + \dots + q^{s+p-1}) |x_1 - x_0|, \quad s = 0, 1, \dots,$$

și pentru orice $p = 1, 2, \dots$.

Din (5.2.8) deducem

$$(5.2.9) \quad |x_{s+p} - x_s| \leq \frac{q^s |x_1 - x_0|}{1-q}, \quad \text{pentru orice } s = 1, 2, \dots,$$

care ne arată că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ verifică condiția lui Cauchy.

Dacă trecem la limită în (5.2.9) pentru $p \rightarrow \infty$ avem:

$$|\bar{x} - x_s| \leq \frac{q^s}{1-q} |x_1 - x_0| \quad \text{pentru } s = 1, 2, \dots$$

adică relația (5.2.5).

Pentru (5.2.6) avem:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q|x_n - \bar{x}| \leq q|x_n - x_{n+1}| + q|x_{n+1} - \bar{x}|$$

de unde rezultă

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q} |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, \dots$$

adică relațiile (5.2.6).

Pentru unicitatea rădăcinii procedăm prin reducere la absurd și în ipoteza că ecuația (5.2.2), echivalentă cu (5.2.1), ar avea cel puțin două rădăcini $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in I$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, ne conduce la relația

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq |\varphi(\bar{x}_1) - \varphi(\bar{x}_2)| \leq q |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

de unde deducem:

$$(1-q) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq 0,$$

ceea ce este absurd deoarece $1-q > 0$ și $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 0$.

Observația 5.2.1. Dacă funcția φ este derivabilă pe \mathbb{I} și dacă există $q \in (0, 1)$ astfel încât

$$(5.2.10) \quad |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{I}$$

atunci condiția ii. din Teorema 5.2.1 este verificată și deci (5.2.4) poate fi înlocuită cu (5.2.10).

Observația 5.2.2. Teorema 5.2.1 rămâne valabilă și dacă intervalul (a, b) se înlocuiește cu mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale.

Observația 5.2.3. În condițiile Teoremei 5.2.1 sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ converge pentru orice alegere a lui $x_0 \in [a, b]$. Rezultă de aici că metoda (5.2.3) este autocorectoare. Aceasta înseamnă că dacă, în rezolvarea practică a metodei, la un anumit pas de iterare s-a comis o eroare de calcul, dar elementul corespunzător din sirul generat de metodă rămâne în intervalul $[a, b]$, această eroare nu influențează rezultatul final. Ea poate influența eventual volumul de calcule pentru a obține o aproximare a lui \bar{x} cu o precizie dată.

Fie $x_0 \in \mathbb{I}$ și $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq \mathbb{I}$, unde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.2.2. Dacă funcția φ verifică următoarele ipoteze:

i. pentru orice $u_1, u_2 \in [x_0 - r, x_0 + r]$, φ verifică condiția lui Lipschitz

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leq q|u_1 - u_2|, \quad 0 < q < 1;$$

ii. dacă $x_1 = \varphi(x_0)$, atunci $|x_1 - x_0| \leq r(1 - q)$,

atunci au loc proprietățile:

j. elementele sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.2.3) rămân în intervalul $[x_0 - r, x_0 + r]$;

jj. există $\bar{x} = \lim x_n$ unde \bar{x} este unică rădăcină a ecuației (5.2.1) în intervalul $[x_0 - r, x_0 + r]$;

jjj. au loc relațiile:

$$(5.2.11) \quad \begin{aligned} |x_{n+1} - \bar{x}| &\leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots \\ |x_{n+1} - \bar{x}| &\leq \frac{q}{1-q} |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, \dots . \end{aligned}$$

Demonstratie. Din ii. rezultă imediat că $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Pentru $x_2 = \varphi(x_1)$, ținând cont de i. avem

$$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq q|x_1 - x_0|,$$

care împreună cu ii. ne conduce la relația:

$$\begin{aligned} |x_2 - x_0| &\leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| = q|x_1 - x_0| + |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq (q+1)(1-q)r = (1-q^2)r < r, \end{aligned}$$

ceea ce arată că $x_2 \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Presupunem în continuare că $x_1, x_2, \dots, x_s \in [x_0 - r, x_0 + r]$ și au loc relațiile:

$$(5.2.12) \quad |x_i - x_{i-1}| \leq q^{i-1} |x_1 - x_0|, \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

Pentru x_{s+1} avem

$$|x_{s+1} - x_s| = |\varphi(x_s) - \varphi(x_{s-1})| \leq q |x_s - x_{s-1}|,$$

de unde folosind (5.2.12) avem:

$$(5.2.13) \quad |x_{s+1} - x_s| \leq q^s |x_1 - x_0|.$$

Ultima relație ipoteza *ii.* și relațiile (5.2.13) ne conduc la relația

$$\begin{aligned} |x_{s+1} - x_0| &\leq |x_{s+1} - x_s| + |x_s - x_{s-1}| + \cdots + |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^s)|x_1 - x_0| \leq (1-q^{s+1})r < r, \end{aligned}$$

adică $x_{s+1} \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Cu aceasta concluzia *j.* este dovedită.

Metoda inducției complete ne arată că relația (5.2.12) are loc pentru orice $s = 1, 2, \dots$. De aici este clar că proprietățile *jj.* și *jjj.* se demonstrează analog ca la Teorema 5.2.1.

Rezolvarea numerică a ecuațiilor cu ajutorul metodelor de iterare, implică o serie de dificultăți care provin din faptul că în decursul calculelor, acestea sunt afectate, în mod cert, atât de erorile de rotunjire cât și de erorile de trunchere.

Mai precis, în mod practic pentru calculul valorilor unor funcții, acestea trebuie aproximare cu funcții simple, cel mai adesea polinoame, și deci intervin în mod necesar erorile de trunchere sau erorile de aproximare.

Pe de altă parte, în decursul calculelor se pot obține numere cu un număr mare de cifre din care prin rotunjire suntem obligați să păstrăm numai un număr limitat de cifre și deci intervin erorile de rotunjire.

Este clar acum, că în realizarea practică a unei metode de iterare nu obținem sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat de (5.2.3) ci un sir $(\xi_n)_{n \geq 0}$ care îl aproximează pe acesta.

Pentru a elucida această problemă vom demonstra mai întâi următoarea teoremă:

Teorema 5.2.3. *Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:*

i. pentru orice $y_1, y_2 \in \mathbb{I} = [a, b]$, are loc relația:

$$(5.2.14) \quad |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq q|y_1 - y_2|, \quad 0 < q < 1;$$

ii. pentru cel puțin un $x_0 \in \mathbb{I}$, $\varphi(x_0) \in \mathbb{I}$;

iii. intervalul $T = \left\{ x \in \mathbb{R}; |x - x_1| \leq \frac{q}{1-q} |x_1 - x_0| \right\}$, unde $x_1 = \varphi(x_0)$, este conținut în \mathbb{I} ,

atunci au loc proprietățile:

j. ecuația (5.2.2) are o singură rădăcină \bar{x} în multimea T ;

jj. sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.2.3) este convergent și $\bar{x} = \lim x_n$;

jjj. au loc relațiile

$$(5.2.15) \quad \begin{cases} |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, & \text{pentru orice } n = 1, 2, \dots, \\ |\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{q}{1-q} |x_{n+1} - x_n|, & n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Demonstrație. Vom arăta la început că toate elementele sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ generat de (5.2.3) sunt în intervalul T .

Fie $x_2 = \varphi(x_1)$, atunci avem:

$$|x_2 - x_1| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq q|x_1 - x_0| < \frac{q}{1-q} |x_1 - x_0|$$

adică $x_2 \in T$.

Presupunem că $x_2, x_3, \dots, x_s \in T$ și au loc relațiile:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq q^{i-1} |x_1 - x_0|, \quad i = \overline{2, s}.$$

Din cele de mai sus deducem:

$$\begin{aligned} |x_{s+1} - x_s| &= |\varphi(x_s) - \varphi(x_{s-1})| \leq \\ &\leq q |x_s - x_{s-1}| \leq q^s |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

ceea ce ne arată că relațiile

$$(5.2.16) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|,$$

sunt verificate pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Din (5.2.16) pentru orice $s \geq 2$ deducem

$$\begin{aligned} |x_{s+1} - x_1| &\leq |x_{s+1} - x_s| + |x_s - x_{s-1}| + \cdots + |x_2 - x_1| \leq \\ &\leq (q^s + q^{s-1} + \cdots + q) |x_1 - x_0| \leq \frac{q}{1-q} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $x_{s+1} \in T$.

Folosind cele de mai sus, consecințele *jj.* și *jjj.* se dovedesc în mod analog ca la Teorema 5.2.1.

Fie acum $\varphi^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care admitem că împreună cu φ verifică relațiile:

$$(5.2.17) \quad |\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b],$$

unde $\varepsilon > 0$ este un număr dat care se alege, aşa cum vom vedea în cele ce urmează, în concordanță cu precizia dorită pentru aproximarea rădăcinii ecuației date.

În cele ce urmează, alături de metoda de iterare

$$(5.2.18) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a, b] \quad n = 0, 1, \dots,$$

vom considera și metoda:

$$(5.2.19) \quad \xi_{n+1} = \varphi^*(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \xi_0 = x_0$$

care aproximează numeric metoda (5.2.18).

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.2.4. *Dacă funcția φ verifică condițiile Teoremei 5.2.3, φ^* verifică (5.2.17) și în plus, intervalul*

$$T^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - \xi_1| \leq \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + 2\delta \right\} \quad \text{unde } \delta = \frac{\varepsilon}{1-q},$$

este conținut în intervalul $[a, b]$, atunci procedeul (5.2.19) poate continua indefinit, astfel încât elementele șirului $(\xi_n)_{n \geq 0}$ să aparțină intervalului T^* . Elementele șirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(\xi_n)_{n \geq 0}$ generate de (5.2.18) respectiv (5.2.19) verifică relațiile $|x_n - \xi_n| \leq \delta$, $n = 1, 2, \dots$. Rădăcina \bar{x} a ecuației (5.2.2) aparține intervalului

$$\widehat{T} = \left\{ x \in \mathbb{R} ; |x - \xi_1| \leq \frac{q}{1-q} |\xi_0 - \xi_1| + \delta \right\}.$$

Demonstrație. Arătăm că intervalul T din ipoteza *iii.* a Teoremei 5.2.3 este cuprins în intervalul \widehat{T} .

Fie $x \in T$, atunci $|x - x_1| \leq \frac{q}{1-q} |x_1 - x_0|$, dar $|x_1 - x_0| = |x_1 - \xi_1| + |\xi_1 - \xi_0|$, deoarece am presupus că $\xi_0 = x_0$.

Folosind inegalitatea de mai sus avem:

$$|x - \xi_1| \leq |x - x_1| + |x_1 - \xi_1| \leq \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + |x_1 - \xi_1|.$$

Dar pentru $|x_1 - \xi_1|$, ținând cont de egalitatea $\xi_0 = x_0$, are loc relația:

$$|x_1 - \xi_1| = |\varphi(x_0) - \varphi^*(\xi_0)| \leq |\varphi(x_0) - \varphi(\xi_0)| + |\varphi(\xi_0) - \varphi^*(\xi_0)| \leq \varepsilon.$$

Din relațiile de mai sus deducem:

$$|x - \xi_1| \leq \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + \varepsilon$$

din care cu atât mai mult avem:

$$(5.2.20) \quad |x - \xi_1| \leq \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + \frac{\varepsilon}{1-q} = \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + \delta,$$

ceea ce ne arată că $x \in \widehat{T}$.

Deoarece rădăcina \bar{x} a ecuației (5.2.2) aparține intervalului T și $T \subseteq \widehat{T}$, rezultă $\bar{x} \in \widehat{T}$.

În continuare vom arăta că elementele sirului $(\xi_n)_{n \geq 0}$ sunt cuprinse în intervalul T^* . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ au loc relațiile

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi_{n+1}| &= |\varphi(x_n) - \varphi^*(\xi_n)| \leq |\varphi(x_n) - \varphi(\xi_n)| + |\varphi(\xi_n) - \varphi^*(\xi_n)| \\ &\leq q|x_n - \xi_n| + \varepsilon. \end{aligned}$$

În relațiile de mai sus să notăm cu $\theta_i = |x_i - \xi_i|$, $\theta_0 = 0$, $i = 0, 1, \dots$.

Rezultă imediat că au loc relațiile

$$\theta_{n+1} \leq q^{n+1} \theta_0 + \varepsilon (1 + q + q^2 + \dots + q^{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{1-q} = \delta,$$

adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ au loc relațiile

$$|x_{n+1} - \xi_{n+1}| \leq \delta.$$

Folosind ultimele inegalități și (5.2.20) deducem:

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi_1| &\leq |\xi_n - x_n| + |x_n - \xi_1| \leq \delta + \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + \delta \\ &= \frac{q}{1-q} |\xi_1 - \xi_0| + 2\delta, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $\xi_n \in T^*$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 5.2.4 nu asigură convergența sirului $(\xi_n)_{n \geq 0}$ chiar dacă sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, ce verifică ipotezele Teoremei 5.2.3, este convergent.

Evident, dacă funcția φ^* verifică condiția lui Lipschitz cu constanta subunitară, este clar că sirul $(\xi_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

În practică, în general, nu cunoaștem apriori valorile exacte ale funcției φ^* , dar știm că ele respectă o anumită distanță față de valorile lui φ .

Aceasta fiind situația, chiar dacă convergența sirului $(\xi_n)_{n \geq 0}$, în ipotezele noastre, nu poate fi dovedită, ne propunem să evaluăm distanța dintre elementele sirului în cauză și rădăcina \bar{x} a ecuației (5.2.2).

În cele ce urmează vom admite două criterii diferite de oprire a iterațiilor.

În primul caz dorim să oprim calculele la acel pas, pentru care

$$(5.2.21) \quad |\xi_{n+1} - \xi_n| < \eta$$

unde $\eta > 0$ este un număr real dat.

Deoarece, aşa cum am specificat mai sus, ipotezele noastre nu asigură convergența sirului $(\xi_n)_{n \geq 0}$, numărul η nu poate fi oricât de mic.

Este necesar deci, să ne asigurăm, prin alegerea unui număr η potrivit, că relația (5.2.21) poate avea loc la un anumit pas de iterare.

În acest sens avem:

$$\begin{aligned} |\xi_{i+1} - \xi_i| &= |\varphi^*(\xi_i) - \varphi^*(\xi_{i-1})| \leq |\varphi^*(\xi_i) - \varphi(\xi_i)| \\ &\quad + |\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})| + |\varphi(\xi_{i-1}) - \varphi^*(\xi_{i-1})| \\ &\leq q |\xi_i - \xi_{i-1}| + 2\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Din relațiile de mai sus rezultă inegalitățile

$$|\xi_{n+1} - \xi_n| \leq q^n |\xi_1 - \xi_0| + \frac{2\varepsilon}{1-q} = q^n |\xi_1 - \xi_0| + 2\delta, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Este clar acum că dacă alegem $\eta > 2\delta$, atunci există $n' \in \mathbb{N}$ pentru care dacă $n > n'$ are loc (5.2.21).

În ipoteza că ξ_{n+1} și ξ_n verifică (5.2.21), vom evalua distanța între ξ_{n+1} și \bar{x} . Avem:

$$\begin{aligned} |\xi_{n+1} - \bar{x}| &\leq |\varphi^*(\xi_n) - \varphi(\bar{x})| \leq |\varphi^*(\xi_n) - \varphi(\xi_n)| + |\varphi(\xi_n) - \varphi(\bar{x})| \\ &\leq \varepsilon + q |\xi_n - \bar{x}| \leq \varepsilon + q |\xi_n - \xi_{n+1}| + q |\xi_{n+1} - \bar{x}| , \end{aligned}$$

de unde rezulta

$$(5.2.22) \quad |\xi_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{\varepsilon + q\eta}{1-q}$$

inegalitate ce ne oferă o evaluare **aposteriorii** a erorii.

În cel de-al doilea caz, vom presupune că de la un anumit pas, sirul $(\xi_n)_{n \geq 0}$ devine periodic, ceea ce în practică se întâmplă destul de frecvent.

Aceasta înseamnă că există $n' \in \mathbb{N}$ și $m \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > n'$ au loc relațiile:

$$(5.2.23) \quad \xi_{n+m} = \xi_n, \quad m - \text{fix.}$$

Evident, dacă relația (5.2.23) este satisfăcută, atunci continuarea calculelor cu relația (5.2.19) nu mai are rost.

Vom evalua eroarea în cazul când relația (5.2.23) este verificată.

Fie $p > n'$, atunci pentru $n = p, p+1, \dots, p+m-1$ avem

$$|\xi_{p+m} - \bar{x}| \leq q^m |\xi_{p+n} - \xi_p| + q^m |\xi_{n+p} - \bar{x}| + \varepsilon \frac{1-q^m}{1-q}$$

de unde rezultă

$$|\xi_{p+m} - \bar{x}| \leq \frac{q^m}{1-q^m} |\xi_{p+m} - \xi_p| + \frac{\varepsilon}{1-q}$$

dar cum $\xi_{p+m} = \xi_p$, avem:

$$(5.2.24) \quad |\xi_n - \bar{x}| \leq \frac{\varepsilon}{1-q} = \delta,$$

adică evaluarea erorii în cel de-al doilea caz.

Următoarea teoremă ne asigură existența rădăcinii ecuației

$$(5.2.25) \quad f(x) = 0.$$

Teorema 5.2.5. *Dacă $\delta > 0$ este un număr real și f o funcție definită, continuă și derivabilă pe $\mathbb{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ și dacă f verifică relația $|f(x_0)| < m\delta$, unde $m = \inf_{x \in \mathbb{I}} |f'(x)|$ și $m > 0$, atunci ecuația (5.2.25) are o singură rădăcină $\bar{x} \in \mathbb{I}$.*

Demonstratie. Pentru precizarea ideilor vom presupune că $f(x_0) > 0$. Deoarece $m > 0$, rezultă că funcția f nu are extreme locale în interiorul lui \mathbb{I} și deci își atinge marginile în punctele $x_0 - \delta$ și $x_0 + \delta$. Cum $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{I}$, rezultă că f este monotonă și f își atinge marginea inferioară într-un punct ξ care coincide cu unul din capetele lui \mathbb{I} . Aplicând formula creșterilor finite avem:

$$f(x_0) - f(\xi) = f'(\eta)(x_0 - \xi),$$

unde $\eta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Deoarece ξ este punct de minim, rezultă

$$f(x_0) - f(\xi) = |f'(\eta)| |x_0 - \xi| \geq m\delta.$$

Din ultima inegalitate și din ipoteza $|f(x_0)| < m\delta$ deducem

$$f(x_0) - f(\xi) > f(x_0)$$

adică $f(\xi) < 0$. Dacă acum ținem cont că $f(x_0) > 0$ și folosim continuitatea și monotonia lui f , rezultă că există în mod unic \bar{x} din intervalul deschis determinat de x_0 și ξ , \bar{x} rădăcină a ecuației (5.2.25).

Rădăcinile ecuației (5.2.2) se mai numesc și puncte fixe ale funcției φ .

Fie $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $\bar{x} \in [a, b]$ un punct fix, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Notăm cu $V(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, unde $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât $V(\bar{x}) \subset [a, b]$.

Pentru determinarea punctelor fixe ale funcției φ , considerăm sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ determinat de metoda iterativă (5.2.3). În raport cu comportarea sirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$ în funcție de alegerea punctului inițial $x_0 \in V(\bar{x})$, punctele fixe ale funcției φ se clasifică în două clase: puncte fixe atractive sau puncte fixe repulsive.

Definiția 5.2.1. Punctul fix \bar{x} al funcției φ se numește punct fix atractiv dacă există o vecinătate a sa $V(\bar{x})$ astfel încât putem alege cel puțin un $x_0 \in V(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ aşa încât sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, generat de (5.2.3), cu elementul inițial x_0 , să fie convergent și $\lim x_n = \bar{x}$.

Definiția 5.2.2. Punctul fix \bar{x} al funcției φ se numește repulsiv dacă pentru orice vecinătate $V(\bar{x})$ a lui \bar{x} , $V(\bar{x}) \subseteq [a, b]$, orice alegere a lui x_0 , $x_0 \in V(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ ca punct inițial în metoda (5.2.3), aceasta ne conduce la un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ divergent.

Următorul rezultat ne furnizează criterii suficiente pentru ca punctul fix \bar{x} să fie atractiv, respectiv repulsiv.

Teorema 5.2.6. Fie $\bar{x} \in [a, b]$, un punct fix al funcției $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția φ este derivabilă pentru orice $x \in V(\bar{x})$, atunci dacă $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, \bar{x} este punct fix atractiv, iar dacă $|\varphi'(\bar{x})| > 1$, \bar{x} este punct repulsiv.

Demonstrație. Presupunem că $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, atunci există $p \in (0, 1)$ astfel încât $|\varphi'(\bar{x})| < p$. Există de asemenea o vecinătate $V(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \subset [a, b]$, astfel încât pentru orice $x \in V(\bar{x})$ este verificată relația

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \leq p.$$

Fie $x_0 \in V(\bar{x})$, atunci relația de mai sus și metoda (5.2.3), ne conduce la relația

$$\left| \frac{x_1 - \bar{x}}{x_0 - \bar{x}} \right| \leq p$$

sau

$$|x_1 - \bar{x}| \leq p |x_0 - \bar{x}| .$$

Din relația $0 < p < 1$ rezultă că $x_1 \in V(\bar{x})$. Fie $x_i \in V(\bar{x})$, pentru $i = 0, 1, \dots, s$. Atunci, procedând ca mai sus, avem

$$\left| \frac{x_{s+1} - \bar{x}}{x_s - \bar{x}} \right| \leq p$$

adică

$$|x_{s+1} - \bar{x}| \leq p |x_s - \bar{x}| ,$$

ceea ce înseamnă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ verifică relațiile:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq p |x_n - \bar{x}| , \quad n = 0, 1, \dots , .$$

Din ultima relație deducem

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq p^{n+1} |x_0 - \bar{x}| , \quad n = 0, 1, \dots ,$$

de unde rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x} .$$

Dacă trecem la limită în (5.2.3) și ținem cont de faptul că φ este continuă în \bar{x} , rezultă $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, adică limita de mai sus a sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ este punctul fix al lui φ .

Pentru cea de-a doua parte a teoremei, observăm că, din faptul că $|\varphi'(\bar{x})| > 1$, rezultă că există $q > 1$ astfel încât $|\varphi'(\bar{x})| > q$. De asemenea există o vecinătate $V'(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta', \bar{x} + \delta') \subset [a, b]$ astfel încât

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \geq q$$

pentru orice $x \in V'(\bar{x})$. Ținând cont de (5.2.3) din relația de mai sus rezultă

$$\left| \frac{x_1 - \bar{x}}{x_0 - \bar{x}} \right| \geq q > 1 ,$$

unde $x_0 \in V'(\bar{x})$ este un element arbitrar din mulțimea considerată.

Din relația de mai sus rezultă:

$$|x_1 - \bar{x}| \geq q |x_0 - \bar{x}| ,$$

adică x_1 se află la o distanță mai mare de \bar{x} decât distanța dintre x_0 și \bar{x} . Este ușor de observat că și celelalte elemente ale lui $(x_n)_{n \geq 0}$ verifică relația semnalată mai sus.

Ceea ce deranjează în condițiile impuse de Teorema 5.2.6 este faptul că trebuie să cunoaștem valoarea derivatei funcției φ în \bar{x} sau eventual margini ale acestei valori.

Pentru determinarea rădăcinilor ecuației (5.2.1) prin metoda iterativă, aceasta trebuie pusă în prealabil sub forma (5.2.2).

Dacă punem, de exemplu, $\varphi(x) = x - f(x)$, atunci $\varphi'(x) = 1 - f'(x)$ și relația $|\varphi'(x)| < 1$ pentru orice $x \in [a, b]$, ne conduce la $0 < f'(x) < 2$. Ultima inegalitate ne arată că, pentru ca $|\varphi'(x)| < 1$, funcția $f(x)$ trebuie să fie strict monotonă cel puțin într-o vecinătate a punctului fix \bar{x} .

Relația $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in V(\bar{x})$, poate fi realizată dacă \bar{x} este rădăcina simplă a ecuației $f(x) = 0$ respectiv $-f(x) = 0$. Cea de-a doua cerință $f'(x) < 2$ poate fi ameliorată dacă considerăm pentru φ relația $\varphi(x) = x - cf(x)$, unde $c \in \mathbb{R}$. Determinăm valoarea lui c astfel încât $|\varphi'(x)| < 1$. Presupunem că există $m, M \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $M > 0$ astfel încât $m < f'(x) < M$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci dacă presupunem că $c > 0$, avem

$$|\varphi'(x)| \leq \max \{|1 - cm|, |1 - cM|\} .$$

Se constată imediat că dacă luăm $\bar{c} = \frac{2}{M + m}$, atunci funcția $F(c) = \max \{|1 - cM|, |1 - cm|\}$ ia cea mai mică valoare. Valoarea minimă este

$$F(\bar{c}) = \frac{M - m}{M + m}$$

Din cele de mai sus rezultă că pentru rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, dacă $f'(x) > 0$ și $m < f'(x) < M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\varphi(x) = x - \frac{2}{M + m} f(x)$$

verifică relația

$$|\varphi'(x)| < 1$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Din ipoteza $m < f'(x) < M$ rezultă

$$\frac{2m}{M + m} < \frac{2f'(x)}{M + m} < \frac{2M}{M + m} \quad \text{pentru } x \in [a, b]$$

sau

$$-\frac{2m}{M + m} > -\frac{2f'(x)}{M + m} > -\frac{2M}{M + m}$$

adică

$$1 - \frac{2m}{M + m} > 1 - \frac{2f'(x)}{M + m} > 1 - \frac{2M}{M + m}$$

sau

$$\frac{M-m}{M+m} > 1 - \frac{2f'(x)}{M+m} > \frac{m-M}{M+m},$$

ceea ce ne arată că

$$|\varphi'(x)| < \frac{M-m}{M+m} < 1$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

5.3 Convergența metodei iterării simple cu mai mulți pași

Considerăm din nou ecuația

$$(5.3.1) \quad x = \varphi(x)$$

unde $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ și $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale. Alături de funcția φ , mai considerăm o funcție $g : \mathbb{I}^s \rightarrow \mathbb{I}$, adică g este o funcție de s variabile. Presupunem că restricția funcției g la diagonala multimii \mathbb{I}^s coincide cu φ , adică are loc relația

$$(5.3.2) \quad g(x, x, \dots, x) = \varphi(x)$$

pentru orice $x \in \mathbb{I}$.

Fie $x_0, x_1, \dots, x_{s-1} \in \mathbb{I}$, atunci putem genera sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, astfel

$$(5.3.3) \quad x_{s+p} = g(x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+s-1}), \quad p = 0, 1, \dots$$

Metoda de iterare (5.3.3) o vom numi metodă iterativă cu s pași.

În ceea ce privește convergența sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.3.3), are loc următoarea teoremă.

Teorema 5.3.1. *Dacă funcțiile g și φ verifică următoarele condiții:*

- i. pentru orice $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{I}$, $g(u_1, u_2, \dots, u_s) \in \mathbb{I}$;
- ii. g împreună cu φ verifică relația (5.3.2);
- iii. există numerele reale $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, s}$ nu toate nule, care în plus verifică relația

$$(5.3.4) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s < 1,$$

astfel încât pentru orice $u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1} \in \mathbb{I}$, este verificată inegalitatea

$$(5.3.5) \quad \begin{aligned} & |g(u_1, u_2, \dots, u_s) - g(u_2, u_3, \dots, u_{s+1})| \\ & \leq \alpha_1|u_1 - u_2| + \dots + \alpha_s|u_s - u_{s+1}|. \end{aligned}$$

Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.3.3) este convergent pentru orice valori inițiale $x_0, x_1, \dots, x_{s-1} \in \mathbb{I}$. Dacă notăm cu $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci $\bar{x} \in \mathbb{I}$ și este unicul punct fix al lui φ din \mathbb{I} .

Demonstrație. Din condiția (5.3.5) și ipoteza i. rezultă următoarele inegalități

$$(5.3.6) \quad \begin{aligned} & |x_{n+1} - x_n| \\ & = |g(x_{n-s+1}, x_{n-s+2}, \dots, x_n) - g(x_{n-s}, x_{n-s+1}, \dots, x_{n-1})| \\ & \leq \alpha_1|x_{n-s+1} - x_{n-s}| + \alpha_2|x_{n-s+2} - x_{n-s+1}| + \dots + \alpha_s|x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

pentru orice $n = s, 2s + 1, \dots$.

Notăm $\rho_i = |x_i - x_{i-1}|$, $i = 1, 2, \dots$, și cu $\alpha = \max \left\{ \rho_1, \frac{\rho_2}{q}, \frac{\rho_3}{q^2}, \dots, \frac{\rho_s}{q^{s-1}} \right\}$, unde q este unica rădăcină pozitivă a ecuației; (Teorema 5.1.6)

$$(5.3.7) \quad P(u) = u^s - \alpha_s u^{s-1} - \alpha_{s-1} u^{s-2} - \dots - \alpha_2 u - \alpha_1 = 0.$$

Este ușor de văzut că, dacă α_i , $i = \overline{1, s}$ verifică (5.3.4), atunci $0 < q < 1$. Din cele de mai sus rezultă

$$(5.3.8) \quad \rho_1 \leq \alpha, \rho_2 \leq \alpha q, \rho_3 \leq \alpha q^2, \dots, \rho_s \leq \alpha q^{s-1}.$$

Din (5.3.7), ținând cont de notațiile adoptate, rezultă relațiile:

$$(5.3.9) \quad \rho_{n+1} \leq \alpha_s \rho_n + \alpha_{s-1} \rho_{n-1} + \dots + \alpha_2 \rho_{n-s+2} + \alpha_1 \rho_{n-s+1}$$

pentru $n = s, s + 1, \dots$

Din (5.3.9) și (5.3.8), ținând cont că q este rădăcina ecuației (5.3.7), avem:

$$\begin{aligned} \rho_{s+1} & \leq \alpha_s \alpha q^{s-1} + \alpha_{s-1} \alpha q^{s-2} + \dots + \alpha_2 \alpha q + \alpha_1 \alpha \\ & = \alpha (\alpha_s q^{s-1} + \alpha_{s-1} q^{s-2} + \dots + \alpha_2 q + \alpha_1) = \alpha q^s \end{aligned}$$

adică are loc relația

$$\rho_{s+1} \leq \alpha q^s.$$

Este ușor de arătat că sunt în general valabile relațiile

$$(5.3.10) \quad \rho_{s+p} \leq \alpha q^{s+p-1}, \quad \text{pentru orice } p = 1, 2, \dots.$$

Din (5.3.10) rezultă fără dificultate relațiile

$$(5.3.11) \quad |x_{n+m} - x_n| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \rho_{n+i} \leq \alpha \sum_{i=0}^{m-1} q^{n+i-1} \leq \frac{\alpha q^{n-1}}{1-q},$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Din (5.3.11) și relația $q < 1$ rezultă că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ verifică condiția lui Cauchy și deci este convergent.

Fie $\bar{x} = \lim x_n$, atunci pentru $m \rightarrow \infty$ din (5.3.11) rezultă

$$(5.3.12) \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{\alpha q^{n-1}}{1-q}.$$

Din (5.3.3) și (5.3.2), trecând la limită pentru $p \rightarrow \infty$, rezultă că \bar{x} este punct fix al lui φ .

Din (5.3.12) observăm că viteza de convergență a metodei de iterare de forma:

$$(5.3.13) \quad x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}), \quad n = s-1, s, s+1, \dots \\ x_1, x_2, \dots, x_s \in \dots$$

este cu atât mai mare cu cât rădăcina pozitivă q a ecuației (5.3.7) este mai mică. Funcția g fiind aleasă, ne propunem în continuare să stabilim în (5.3.13) un algoritm, pentru care ecuația corespunzătoare de forma (5.3.7) să admită rădăcina pozitivă cea mai mică.

Fie deci i_0, i_1, \dots, i_{s-1} , o permutarea oarecare a numerelor $0, 1, \dots, s-1$. Atunci $i_0 + n - s + 1, i_1 + n - s + 1, \dots, i_{s-1} + n - s + 1$ este o permutare ce corespunde numerelor $n - s + 1, n - s + 2, \dots, n$. Corespunzător permutării de mai sus obținem o nouă metodă de formă (5.3.13), adică

$$(5.3.14) \quad x_{n+1} = g(x_{i_0+n-s+1}, x_{i_1+n-s+1}, \dots, x_{i_{s-1}+n-s+1}), \quad n = s-1, s, \dots$$

În acest fel, pornind de la funcția dată g , putem genera $s!$ metode de iterare cu s pași, în general distințe.

Teorema 5.3.1 ne arată că, în anumite ipoteze, fiecare din aceste $s!$ metode converge către punctul fix al lui φ . Problema care se pune însă este aceea de a determina din cele $s!$ metode pe aceea care este optimală, adică cea care converge cel mai rapid.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}$, care verifică relațiile

$$(5.3.15) \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{s-1} \geq a_s \geq 0$$

și

$$(5.3.16) \quad 0 < \sum_{i=1}^s a_i < 1.$$

Sistemului de numere a_i , $i = \overline{1, s}$ precizat mai sus, îi atașem următoarele ecuații:

$$(5.3.17) \quad P(u) = u^s - a_1 u^{s-1} - \cdots - a_{s-1} u - a_s = 0$$

$$(5.3.18) \quad Q(u) = u^s - a_s u^{s-1} - \cdots - a_2 u - a_1 = 0$$

și

$$(5.3.19) \quad R(u) = u^s - a_{i_1} u^{s-1} - a_{i_2} u^{s-2} - \cdots - a_{i_{s-1}} u - a_{i_s} = 0$$

unde (i_1, i_2, \dots, i_s) este o permutare oarecare a numerelor $(1, 2, \dots, s)$.

Fie α rădăcina ecuației $P(u) = 0$, β rădăcina ecuației $Q(u) = 0$ și γ rădăcina ecuației $R(u) = 0$ unde $r \neq \alpha$ și $\gamma \neq \beta$. Are loc o teoremă analogă cu Teorema 5.1.8.

Teorema 5.3.2. *Dacă a_i , $i = \overline{1, s}$ verifică relațiile (5.3.15) și (5.3.16), atunci orice ecuație de forma (5.3.19) are o singură rădăcină pozitivă și subunitară și rădăcinile celor 3 ecuații verifică relațiile*

$$(5.3.20) \quad 0 < \alpha < \gamma < \beta < 1.$$

Demonstrație. Faptul că ecuațiile de forma (5.3.18) au o singură rădăcină pozitivă, se demonstrează analog ca la Teorema 5.1.6. Faptul că orice ecuație de forma menționată admite o rădăcină pozitivă subunitară rezultă din relațiile $R(0) \leq 0$ și $R(1) > 0$. Inegalitatea (5.3.16) ne arată că cel puțin unul din coeficienții a_i , $i = \overline{1, s}$ ecuației (5.3.19) este pozitiv și deci ecuația (5.3.19) are rădăcină pozitivă.

Pentru relațiile (5.3.20), procedând ca la Teorema 5.1.8, se arată imediat că $R(\alpha) < 0$ și $R(\beta) > 0$, folosind relațiile (5.3.15) și (5.3.16) și faptul că $0 < \alpha < 1$ și $0 < \beta < 1$.

Presupunem că φ și g verifică ipotezele Teoremei 5.3.1 și rearanjăm numerele α_i , $i = 1, n$ din condiția *iii.* (Teorema 5.3.1) astfel încât

$$(5.3.21) \quad \alpha_{i_1} \geq \alpha_{i_2} \geq \cdots \geq \alpha_{i_{s-1}} \geq \alpha_{i_s} \geq 0$$

și punem

$$(5.3.22) \quad a_j = \alpha_{i_j}, \quad j = \overline{1, s}.$$

În continuare considerăm aplicația $h : I^s \rightarrow I$ dată de relația

$$(5.3.23) \quad h(u_1, u_2, \dots, u_s) = g(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_s})$$

unde (i_1, i_2, \dots, i_s) este permutarea numerelor $(1, 2, \dots, s)$ ce corespunde relației (5.3.21).

Din (5.3.5), obținem pentru h următoarea relație

$$|h(u_1, u_2, \dots, u_s) - h(u_2, u_3, \dots, u_{s+1})| \leq \sum_{j=1}^s a_j |u_{j+1} - u_j|$$

pentru orice $u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1} \in I$, unde evident sunt verificate relațiile:

$$(5.3.24) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{s-1} \geq a_s \geq 0$$

și

$$0 < \sum_{i=1}^s a_i < 1.$$

Considerăm, pentru rezolvarea ecuației (5.3.1), metoda de iterare

$$(5.3.25) \quad x_{n+1} = h(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}), \quad n = s-1, s, \dots$$

unde $x_0, x_1, \dots, x_{s-1} \in I$.

În condițiile Teoremei 5.3.1, din (5.3.12) rezultă că pentru evaluarea erorii, în procedeul (5.3.25) se obține cea mai mică delimitare atunci când ecuația corespunzătoare de forma (5.3.7) are rădăcina pozitivă cea mai mică.

Din Teorema 5.3.2 și cele comentate mai sus, rezultă:

Teorema 5.3.3. În condițiile Teoremei 5.3.1, dintre toate cele $s!$ metode, metoda iterativă cu s pași, pentru care se obține cea mai bună delimitare a erorii dată de (5.3.12), este cea dată de (5.3.25), cu h definită prin relația (5.3.23) și care corespunde ordinei descrescătoare a constantelor a_i , $i = \overline{1, s}$.

5.4 Criterii generale de convergență a sirurilor de aproximare a rădăcinilor ecuațiilor

În acest paragraf vom studia condiții suficiente pentru ca o metodă iterativă, sau mai general un sir de numere reale să fie convergent către o rădăcină \bar{x} a unei ecuații.

Fie $I = [a, b]$, un interval al axei reale și ecuația

$$(5.4.1) \quad f(x) = 0$$

unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Atașăm ecuației (5.4.1) un sir $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n \in [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$ și un număr natural $s \geq 2$.

Ne propunem să dăm condiții suficiente pentru ca sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ să fie convergent, și dacă $\bar{x} = \lim x_n$, atunci $f(\bar{x}) = 0$ și în plus ordinul de convergență al sirului considerat să fie s .

În legătură cu cele semnalate mai sus are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.4.1. *Dacă sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, funcția f , numărul natural $s \geq 2$ și numărul real și pozitiv δ verifică condițiile:*

i. intervalul $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$;

ii. funcția f este derivabilă până la ordinul s inclusiv pe fiecare punct al intervalului Δ și

$$(5.4.2) \quad \sup_{x \in \Delta} |f^{(s)}(x)| = M < +\infty;$$

iii. există o constantă $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, astfel încât pentru orice $n = 0, 1, \dots$, au loc relațiile

$$(5.4.3) \quad \left| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_n) (x_{n+1} - x_n)^i \right| \leq \alpha |f(x_n)|^s;$$

iv. există o constantă $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ astfel încât pentru orice $n = 0, 1, \dots$, au loc relațiile

$$(5.4.4) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \beta |f(x_n)|;$$

v. constantele α, β, M și δ verifică relațiile

$$(5.4.5) \quad \rho_0 = v |f(x_0)| < 1;$$

și

$$(5.4.6) \quad \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)} \leq \delta,$$

unde

$$v = \left(\alpha + \frac{M \beta^{s-1}}{s!} \right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Atunci au loc următoarele proprietăți:

j. sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și dacă $\bar{x} = \lim x_n$, atunci $f(\bar{x}) = 0$;

jj. $\bar{x} \in \Delta$;

$$\begin{aligned}
& \text{j}jj. \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
& \text{jv.} \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1 - \rho_0^{s^n})}, \quad n = 0, 1, \dots; \\
& v. \quad |f(x_n)| \leq \frac{\rho_0^{s^n}}{v}, \quad n = 0, 1, \dots.
\end{aligned}$$

Demonstrație. În condițiile impuse în teorema, vom arăta că elementele sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt conținute în intervalul Δ .

Pentru x_1 din ipoteza iv. avem

$$|x_1 - x_0| \leq \beta |f(x_0)| = \frac{\beta v |f(x_0)|}{v} \leq \frac{\beta \rho_0}{v} < \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)} \leq \delta$$

adică $x_1 \in \Delta$.

Din ipotezele ii., iii. și iv., aplicând formula lui Taylor, avem:

$$\begin{aligned}
|f(x_1)| &\leq \left| f(x_1) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i \right| + \left| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x_1 - x_0)^i \right| \\
&\leq \frac{M}{s!} |x_1 - x_0|^s + \alpha |f(x_0)|^s \leq \left(\frac{M \beta^s}{s!} + \alpha \right) |f(x_0)|^s
\end{aligned}$$

de unde ținând cont de v. obținem

$$|f(x_1)| \leq v^{s-1} |f(x_0)|^s.$$

Presupunem în continuare că au loc relațiile

- a) $x_i \in \Delta$, $i = 1, 2, \dots, k$;
- b) $|x_i - x_{i-1}| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^{i-1}}}{v}$, $i = 1, 2, \dots, k$;
- c) $|f(x_i)| \leq v^{s-1} |f(x_{i-1})|$, $i = 1, 2, \dots, k$.

În ipotezele de mai sus și vom arăta că au loc relațiile:

- α). $x_{k+1} \in \Delta$;
- β). $|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^k}}{v}$;
- γ). $|f(x_{k+1})| \leq v^{s-1} |f(x_k)|^s$.

Din relațiile c) deducem fără dificultate relațiile:

$$v |f(x_i)| \leq [v |f(x_0)|]^{s^i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

adică

$$(5.4.7) \quad |f(x_i)| \leq \frac{\rho_0^{s^i}}{v}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Din relația de mai sus și iv. avem

$$(5.4.8) \quad |x_{k+1} - x_k| \leq \beta |f(x_k)| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^k}}{v},$$

adică relația β).

În continuare folosind b) și β) avem:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_0| &\leq \sum_{i=0}^k |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{\beta}{v} \sum_{i=0}^k \rho_0^{s^i} \\ &\leq \frac{\beta \rho_0}{v} \left(1 + \rho_0^{s-1} + \rho_0^{s^2-1} + \cdots + \rho_0^{s^k-1} \right) \end{aligned}$$

de unde ținând cont că $s \geq 2$ și $\rho_0 < 1$, deducem

$$|x_{k+1} - x_0| \leq \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)},$$

ceea ce ne arată că $x_{k+1} \in \Delta$.

Pentru relația γ), folosind formula lui Taylor, deducem:

$$\begin{aligned} |f(x_{k+1})| &\leq \left| f(x_{k+1}) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_k) (x_{k+1} - x_k)^i \right| \\ &+ \left| \sum_{i=0}^{s-1} f(x_k) (x_{k+1} - x_k)^i \right| \leq \left(\alpha + \frac{M\beta^s}{s!} \right) |f(x_k)|^s \\ &\leq v^{s-1} |f(x_k)|^s, \end{aligned}$$

care împreună cu (5.4.7) ne conduce la relațiile v .

Relațiile b) și (5.4.8) ne arată că proprietățile jjj. sunt adevărate.

Pentru convergență șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ folosim teorema lui Cauchy.

Din cele demonstreate mai sus rezultă, prin inducție, că proprietățile a) - c) au loc pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Din acestea rezultă relația:

$$\begin{aligned} (5.4.9) \quad |x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{\beta}{v} \sum_{i=n}^{n+p-1} \rho_0^{s^i} \\ &\leq \frac{\beta}{v} \rho_0^{s^n} \sum_{i=n}^{n+p-1} 1 + \rho_0^{s^{n+1}-s^n} + \cdots + \rho_0^{s^{n+p-1}-s^n} < \\ &< \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1 - \rho_0^{s^n})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{și} \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $\rho_0 < 1$, rezultă că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este fundamental, deci conform teoremei lui Cauchy, este convergent.

Fie $\bar{x} = \lim x_n$, atunci pentru $p \rightarrow \infty$ din (5.4.9) deducem

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\beta \rho_0^{s^n}}{v(1 - \rho_0^{s^n})}$$

adică relația *jv*. Din ultima relație, pentru $n = 0$ rezultă

$$|\bar{x} - x_0| \leq \frac{\beta \rho_0}{v(1 - \rho_0)} \leq \delta$$

adică relația *jj*.

Arătăm că \bar{x} este rădăcină a ecuației (5.4.1). Din continuitatea funcției f și din v , pentru $n \rightarrow \infty$ rezultă

$$0 \leq |f(\bar{x})| \leq \lim \frac{\rho_0^{s^n}}{v} = 0,$$

adică $f(\bar{x}) = 0$. Cu aceasta teorema este dovedită.

Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, generat de o metodă de iterare de forma:

$$(5.4.10) \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in [a, b]$$

unde $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ este o funcție de următoarea formă

$$g(x) = x + \varphi(x).$$

O consecință a Teoremei 5.4.1 este următoarea

Teorema 5.4.2. *Dacă funcția φ , elementul $x_0 \in [a, b]$ și numărul real $\delta > 0$ se pot alege astfel încât să fie verificate condițiile:*

- i. intervalul $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \delta\} \subseteq [a, b]$
- ii. funcția f este derivabilă până la ordinul s inclusiv unde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ și $\sup_{x \in \Delta} |f^{(s)}(x)| \leq M < +\infty$
- iii. are loc relația

$$\left| \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x) \varphi^i(x) \right| \leq \alpha |f(x)|^s, \quad \text{pentru orice } x \in \Delta,$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$;

iv. funcția φ verifică relația

$$|\varphi(x)| \leq \beta |f(x)|$$

pentru orice $x \in \Delta$, unde $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$;
 v. numerele α, β, M și δ verifică relațiile:

$$(5.4.11) \quad \rho_0 = v|f(x_0)| < 1,$$

$$\text{unde } v = \left(\alpha + \frac{M\beta^s}{s!} \right)^{\frac{1}{s-1}} \text{ și}$$

$$(5.4.12) \quad \frac{\beta\rho_0}{v(1-\rho_0)} \leq \delta.$$

Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.4.10) are următoarele proprietăți:

- j. sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și dacă notăm cu $\bar{x} = \lim x_n$, atunci \bar{x} este soluția ecuației (5.4.1) și $\bar{x} \in \Delta$;
- jj. $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\beta\rho_0^{s^n}}{v}$, pentru orice $n = 0, 1, \dots$;
- jjj. $|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\beta\rho_0^{s^n}}{v(1-\rho_0^{s^n})}$, $n = 0, 1, \dots$.

Demonstrație. Teorema este o consecință imediată a Teoremei 5.4.1, deoarece toate ipotezele acesteia sunt verificate de sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.4.10).

În continuare vom aplica Teorema 5.4.2 pentru studiul convergenței metodei lui Newton respectiv metodei lui Cebâșev.

Pentru metoda lui Newton, considerăm sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de relațiile

$$(5.4.13) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots.$$

În legătură cu convergența metodei (5.4.13) are loc teorema:

Teorema 5.4.3. Dacă $x_0 \in [a, b]$, funcția f și numărul $\delta > 0$ verifică condițiile:

- i. $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \delta\} \subseteq [a, b]$;
- ii. funcția f este derivabilă până la ordinul 2 inclusiv pentru orice $x \in \Delta$ și $\sup_{x \in \Delta} |f''(x)| \leq M$;
- iii. $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \Delta$ și $\frac{1}{|f'(x)|} \leq \beta$, unde $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$;
- iv. $\rho_0 = \frac{\beta^2 M |f(x_0)|}{2} < 1$;
- v. are loc relația $\frac{2\rho_0}{BM(1-\rho_0)} \leq \delta$.

Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.4.13) este convergent și dacă notăm cu $\bar{x} = \lim x_n$, rezultă că $f(\bar{x}) = 0$.

În plus au loc relațiile:

j. $\bar{x} \in \Delta$;

$$jj. |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{2\rho_0^{2^n}}{\beta M}, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$jjj. |\bar{x} - x_n| \leq \frac{2\rho_0^{2^n}}{\beta M (1 - \rho_0^{2^n})}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Demonstrare. În Teorema 5.4.2 considerăm funcția φ de forma:

$$\varphi(x) = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

și observăm că sunt verificate toate ipotezele Teoremei 5.4.2 în care $v = \frac{\beta^2 M}{2}$, deoarece cum ușor se verifică $\alpha = 0$.

Rezultă că toate concluziile Teoremei 5.4.3 sunt demonstate.

O altă metodă spre care ne vom îndrepta atenția este cunoscută ca metoda lui Cebâșev, dată de relația

$$(5.4.14) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^3}, \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots.$$

Pentru studiul convergenței acestei metode, considerăm în (5.4.10) funcția φ de forma:

$$\varphi(x) = -\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x)f^2(x)}{[f'(x)]^3}.$$

Un calcul simplu ne conduce la relația

$$(5.4.15) \quad \begin{aligned} & f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \varphi(x) + \frac{1}{2} f''(x) \varphi^2(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{[f''(x)]^2 f^3(x)}{[f'(x)]^4} + \frac{1}{8} \frac{[f''(x)]^3 f^4(x)}{[f'(x)]^6} \end{aligned}$$

pentru orice $x \in [a, b]$, în ipoteza că f este derivabilă până la ordinul 3 inclusiv pe $[a, b]$.

Fie $\delta > 0$ și $x_0 \in [a, b]$, astfel încât $\Delta = \{x \in [a, b] \mid |x - x_0| \leq \delta\} \subseteq [a, b]$. Presupunem că $f'''(x)$ este mărginită pe Δ și notăm cu

$$M_3 = \sup_{x \in \Delta} |f'''(x)|.$$

În continuare introducem următoarele notații:

$$M_2 = |f''(x_0)| + M_3\delta, \quad M_1 = |f'(x_0)| + M_2\delta, \quad M_0 = |f(x_0)| + M_1\delta.$$

Presupunem că $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \Delta$ și notăm cu $m = \inf_{x \in \Delta} |f'(x)|$, evident $m > 0$, deoarece f' este continuă.

Introducem încă următoarele notații:

$$(5.4.16) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{M_2^2}{m^4} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{M_2 M_0}{m^2} \right]$$

și

$$(5.4.17) \quad \nu = \frac{1}{m} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{M_2 M_0}{m^2} \right].$$

Relativ la convergența metodei (5.4.14), ținând cont de ipotezele de mai sus, are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.4.4. *Dacă f și δ se pot alege astfel încât pe intervalul Δ să fie verificate următoarele condiții:*

i. numerele μ și ν date de relațiile (5.4.16) și (5.4.17) verifică relația

$$\rho_0 = \sqrt{\mu + \frac{M_3 \nu^3}{6}} |f(x_0)| < 1$$

și

$$\frac{\nu \rho_0}{\sqrt{\mu + \frac{M_3 \nu^3}{6}} (1 - \rho_0)} \leq \delta,$$

atunci au loc următoarele proprietăți:

j. sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.4.14) este convergent și dacă notăm cu $\bar{x} = \lim x_n$, atunci \bar{x} este rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ și $\bar{x} \in \Delta$;

jj. au loc relațiile

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\nu \rho_0^{3^n}}{\sqrt{\mu + \frac{M_3 \nu^3}{6}}} \quad n = 0, 1, \dots,$$

și

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\nu \rho_0^{3^n}}{(1 - \rho_0^{3^n}) \sqrt{\mu + \frac{M_3 \nu^3}{6}}}, \quad n = 0, 1, \dots, .$$

Demonstrație. Arătăm că sunt îndeplinite condițiile Teoremei 5.4.2. Aplicând formula lui Taylor avem

$$\begin{aligned} |f''(x)| &\leq |f''(x) - f''(x_0)| + |f''(x_0)| \leq |f''(x_0)| + M_3|x - x_0| \\ &\leq |f''(x_0)| + M_3\delta = M_2, \text{ pentru orice } x \in \Delta. \end{aligned}$$

Analog obținem:

$$|f'(x)| \leq M_2\delta + |f'(x_0)| = M_1, \quad |f(x)| \leq M_1\delta + |f(x_0)| = M_0,$$

pentru orice $x \in \Delta$.

Din (5.4.15), ținând cont de cele de mai sus, obținem:

$$\begin{aligned} &\left| f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)\varphi(x) + \frac{1}{2!} f''(x)\varphi^2(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{M_2^2}{m^4} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{M_2 M_0}{m^2} \right] |f(x)|^3 \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \Delta$ și de asemenea ținând cont de forma funcției φ , avem

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{m} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{M_2 M_0}{m^2} \right] |f(x)|.$$

Folosind notațiile introduse anterior, avem

$$\left| f(x) + f'(x)\varphi(x) + \frac{1}{2} f''(x)\varphi^2(x) \right| \leq \mu |f(x)|^3$$

și

$$|\varphi(x)| \leq \nu |f(x)|, \quad \text{pentru orice } x \in \Delta.$$

Este evident că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 5.4.2 pentru $\alpha = \mu$ și $\beta = \nu$. Cu aceasta teorema este dovedită.

5.5 Convergența metodei lui Newton

Așa cum am văzut, metoda lui Newton constă în construcția unui sir $(x_n)_{n \geq 0}$ folosind următoarele relații:

$$(5.5.1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in [a, b].$$

Criteriul de convergență pentru metoda (5.5.1) pe care îl vom expune în cele ce urmează, ne oferă și informații privind existența rădăcinii ecuației $f(x) = 0$ într-o vecinătate a punctului inițial $x_0 \in [a, b]$.

În literatura de specialitate, teorema care urmează este atribuită lui Cauchy (vezi [88]).

Teorema 5.5.1. Dacă funcția f , elementul inițial x_0 și numărul real $\delta > 0$ verifică ecuațiile:

- i. intervalul $K_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$;
- ii. funcția f este derivabilă până la ordinul 2 inclusiv pe K_0 ;
- iii. $f'(x_0) \neq 0$;
- iv. $\sup_{x \in K_0} |f''(x)| \leq K$;
- v. numerele $m_0 K$ și δ verifică relațiile

$$(5.5.2) \quad h_0 = m_0 \eta_0 K < \frac{1}{2},$$

$$\text{unde } \eta_0 = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|, \quad m_0 = \frac{1}{|f'(x_0)|} \text{ și}$$

$$(5.5.3) \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 \leq \delta,$$

atunci au loc proprietățile:

- j. sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) este convergent;
- jj. dacă $\bar{x} = \lim x_n$ atunci $\bar{x} \in K_0$ și $f(\bar{x}) = 0$;
- jjj. are loc delimitarea

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^n-1} \eta_0, \quad n = 0, 1, \dots, .$$

Demonstratie. Vom arăta în cele ce urmează că prin trecere de la x_0 la x_1 cu relațiile (5.5.1), condițiile i. - v. nu se schimbă.

Din (5.5.1) pentru $n = 0$ avem:

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \eta_0 \leq \delta,$$

deoarece $\frac{h_0}{1 - \sqrt{1 - 2h_0}} < 1$, adică $x_1 \in K_0$.

În continuare avem:

$$(5.5.4) \quad \frac{1}{|f'(x_1)|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{1}{f'(x_0)} [f'(x_0) - f'(x_1)] \right|} \cdot \frac{1}{|f'(x_0)|} \leq \frac{m_0}{1 - m_0 K \eta_0}$$

deoarece $x_1 \in K_0$ și atunci $|f'(x_1) - f'(x_0)| \leq K |x_1 - x_0|$.

Relația (5.5.4) se mai poate scrie în felul următor:

$$(5.5.5) \quad \frac{1}{|f'(x_1)|} \leq \frac{m_0}{1 - h_0} = m_1.$$

Din (5.5.5) rezultă

$$(5.5.6) \quad \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \leq \left| \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_1 - x_0)^2}{|f'(x_1)|} \right|$$

unde ξ aparține intervalului deschis delimitat de x_0 și x_1 .

Deoarece $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$, din (5.5.6) rezultă:

$$\left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{K\eta_0^2 m_0}{1 - h_0} = \frac{1}{2} \frac{K\eta_0 m_0}{1 - h_0} \eta_0 = \frac{1}{2} \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 = \eta_1.$$

Deoarece are loc relația:

$$\frac{1}{2} \frac{h_0}{1 - h_0} < \frac{1}{2}$$

care se justifică în virtutea ipotezei $h_0 < \frac{1}{2}$. Rezultă că

$$(5.5.7) \quad \eta_1 < \frac{1}{2}.$$

În continuare notăm cu $h_1 = m_1 \eta_1 k$ și avem:

$$(5.5.8) \quad h_1 = \frac{m_0}{1 - h_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{h_0 \eta_0}{1 - h_0} K = \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{(1 - h_0)^2} < \frac{1}{2},$$

adică este verificată ipoteza (5.5.2) pentru h_1 .

Considerăm acum următoarele relații:

a) $m_n = \frac{m_{n-1}}{1 - h_{n-1}}$;

b) $\eta_n = \frac{1}{2} \frac{h_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \eta_{n-1}$;

c) $h_n = \frac{1}{2} \frac{h_{n-1}^2}{(1 - h_{n-1})^2}$,

care pentru $n = 1$ am dovedit mai sus că sunt verificate.

Presupunem că relațiile a), b) și c) sunt verificate pentru $n = s$, unde am notat:

$$m_s = \frac{1}{|f'(x_s)|}, \quad h_s = Km_s \eta_s \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_s = \left| \frac{f(x_s)}{f'(x_s)} \right| \text{ și } x_s \in K_0.$$

Așa cum am trecut de la x_0 la x_1 putem trece și de la x_s la x_{s+1} și este clar că relațiile a), b) și c) sunt verificate și pentru $n = s + 1$.

Din (5.5.1) rezultă:

$$|x_{s+1} - x_s| = \left| \frac{f(x_s)}{f'(x_s)} \right| = \eta_s$$

iar din c) rezultă succesiv:

$$h_s \leq \frac{1}{2} (2h_0)^{2^s}, \quad s = 1, 2, \dots, .$$

De asemenea din b) rezultă:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{1}{2} \frac{h_{s-1}}{1 - h_{s-1}} \eta_{s-1} \leq h_{s-1} \eta_{s-1} \leq \dots \\ &\leq h_{s-1} h_{s-2} \dots h_0 \eta_0 \leq \frac{1}{2^s} (2h_0)^{2^s-1} \eta_0. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $N(h_s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_s}}{h_s}$, atunci este ușor de văzut că are loc relația

$$\eta_s N(h_s) - \eta_{s+1} N(h_{s+1}) = \eta_s, \quad s = 0, 1, \dots.$$

Folosind relația de mai sus deducem

$$\begin{aligned} |x_{s+p} - x_s| &\leq \eta_s + \eta_{s+1} + \dots + \eta_{s+p-1} \\ &= \eta_s N(h_s) - \eta_{s+p} N(h_{s+p}) < \eta_s N(h_s) < 2\eta_s \\ &= \frac{1}{2^{s-1}} (2h_0)^{2^s-1}, \quad s = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

și pentru orice $p \in \mathbb{N}$.

Ultima inegalitate ne asigură că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) este convergent. Din această relație, pentru $p \rightarrow \infty$, rezultă

$$|\bar{x} - x_s| \leq \frac{1}{2^{s-1}} (2h_0)^{2^s-1}, \quad s = 0, 1, \dots$$

adică delimitarea *jjj*. Tot din relația amintită avem

$$|x_{s+p} - x_s| \leq \eta_s N(h_s)$$

din care, pentru $p \rightarrow \infty$, rezultă

$$|\bar{x} - x_s| \leq \eta_s N(h_s),$$

din care, pentru $s = 0$ deducem

$$|\bar{x} - x_0| \leq \eta_0 N(h_0),$$

de unde ținând cont de (5.5.3) rezultă

$$|\bar{x} - x_0| \leq \eta_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \leq \delta,$$

adică $\bar{x} \in K_0$.

Faptul că \bar{x} verifică ecuația $f(x) = 0$, rezultă prin trecere la limită în relațiile (5.5.1), observând că $f'(x_n) \neq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În legătură cu unicitatea rădăcinii ecuației $f(x) = 0$, în intervalul K_0 , are loc următoarea teoremă.

Teorema 5.5.2. *Dacă sunt verificate condițiile i. – iii. și v. din Teorema (5.5.1) iar condiția iv. se înlocuiește cu condiția*

$$iv'. \sup_{x \rightarrow K'_0} |f''(x)| \leq K,$$

unde presupunem că $K'_0 = [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \subseteq [a, b]$ iar $\delta' = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0$, atunci \bar{x} este unica rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în intervalul K_0 .

Demonstrație. Fie \bar{x} o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, $\bar{x} \in K_0$. Atunci este ușor de văzut că există $0 < \theta_1 < 1$ pentru care

$$|\bar{x} - x_0| \leq \theta_1 L(h_0) \eta_0$$

unde am notat $L(h_0) = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}$.

Fie $F_0(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$. Avem relațiile $F'_0(x_0) = 0$, $x_1 = F_0(x_0)$ și $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$. Ținând cont de aceste relații avem:

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x_1| &= |F_0(\bar{x}) - F_0(x_0)| = |F_0(\bar{x}) - F'_0(x_0)(\bar{x} - x_0) - F_0(x_0)| \\ &\leq \frac{1}{2} m_0 K |\bar{x} - x_0|^2 = \frac{1}{2} m_0 K \theta_1^2 L^2(h_0) \eta_0^2 \\ &= \theta_1^2 L(h_1) \eta_1, \end{aligned}$$

unde

$$L(h_1) = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1}.$$

Procedând ca mai sus, din aproape în aproape, este ușor de văzut că are loc o relație de forma

$$|\bar{x} - x_n| \leq \theta_1^{2^n} L(h_n) \eta_n$$

dar

$$L(h_n)\eta_n = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_n}}{h_n} \eta_n \leq \frac{2\eta_n}{h_n} = \frac{2}{K \cdot m_n}$$

și dacă ținem cont de relația $m_n > m_0$ rezultă

$$L(h_n)\eta_n < \frac{2}{Km_0}$$

care ne conduce la

$$|\bar{x} - x_n| \leq \theta_1^{2^n} \frac{2}{m_0 K}$$

și deci $\lim x_n = \bar{x}$. Unicitatea limitei unui sir convergent ne arată că \bar{x} este unică rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, $\bar{x} \in K_0$.

În continuare vom analiza câteva rezultate privind convergența locală a metodei lui newton în condiții în care derivatele de ordinul 1 și 2 ale funcției f nu se anulează pe intervalul $[a, b]$.

Presupunem că funcția f este derivabilă până la ordinul 2 inclusiv pe intervalul $[a, b]$. Vom analiza separat convergența sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) în fiecare din următoarele ipoteze:

- a) $f'(x) > 0$ și $f''(x) < 0$ pentru orice $x \in [a, b]$;
- b) $f'(x) > 0$ și $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$;
- c) $f'(x) < 0$ și $f''(x) < 0$ pentru orice $x \in [a, b]$;
- d) $f'(x) < 0$ și $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

De asemenea, vom presupune că are loc relația

$$(5.5.9) \quad f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Observăm că relația $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ și (5.5.9) ne asigură existența unei singure rădăcini $\bar{x} \in [a, b]$, a ecuației $f(x) = 0$.

Convenim să alegem drept punct inițial $x_0 \in [a, b]$ în relațiile (5.5.1) acel punct pentru care

$$(5.5.10) \quad f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

În ipotezele de mai sus analizăm pe rând fiecare din cazurile a) - d) în parte.

Considerăm cazul a). Deoarece $f''(x) < 0$, rezultă $f''(x_0) < 0$ și deci din (5.5.10) rezultă $f(x_0) < 0$, dar cum $f'(x) > 0$, rezultă că f este crescătoare și deci $x_0 < \bar{x}$, unde \bar{x} este rădăcina unică a ecuației $f(x) = 0$. Din relația

$$(5.5.11) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

rezultă fără dificultate că $x_1 > x_0$. În continuare dezvoltând funcția f după formula lui Taylor în x_0 și ținând cont de (5.5.11) avem:

$$\begin{aligned} 0 = f(\bar{x}) &= f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(\bar{x} - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(\bar{x} - x_0)^2 \\ &= f'(x_0)(\bar{x} - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(\bar{x} - x_0)^2 \end{aligned}$$

unde $\xi \in (x_0, \bar{x})$.

Din relația de mai sus rezultă

$$\bar{x} - x_1 = -\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} (\bar{x} - x_0)^2$$

adică $\bar{x} - x_1 > 0$, deci $x_1 < \bar{x}$.

Repetând raționamentul de mai sus, pentru cazul când în loc de x_0 punem x_s , $s > 0$ cu condiția $f(x_s) < 0$, atunci ușor deducem că au loc relațiile:

$$x_s < x_{s+1} < \bar{x}, \quad s = 0, 1, \dots.$$

Sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) este deci crescător și mărginit superior, adică convergent.

Dacă $l = \lim x_n$, atunci trecând la limită în (5.5.1) pentru $n \rightarrow \infty$, rezultă $l = \bar{x}$.

Relația

$$(5.5.12) \quad \bar{x} - x_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})} (\bar{x} - x_{n-1})^2, \quad \xi_{n-1} \in (x_{n-1}, \bar{x}), \quad n = 1, 2, \dots$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Cazul b). În acest caz $f(x_0) > 0$ și deci, ținând cont de faptul că $f'(x) > 0$, rezultă că $x_0 > \bar{x}$.

Relația

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ne arată că $x_1 < x_0$. De asemenea relația

$$\bar{x} - x_1 = -\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} (\bar{x} - x_0)^2, \quad \xi_0 \in (\bar{x}, x_0),$$

ținând cont că $f''(x) > 0$, ne conduce la inegalitatea

$$\bar{x} < x_1, \quad \text{adică} \quad \bar{x} < x_1 < x_0.$$

Repetând ca la Cazul a) raționamentul de mai sus, pentru cazul când înlocuim pe x_0 cu un element $x_s > \bar{x}$, adică $f(x_s) > 0$, rezultă clar că avem

$$\bar{x} > x_{s+1} > x_s, \quad s = 0, 1, 1\dots$$

adică sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) este convergent și limita sa $l = \bar{x}$. Raționamente analoage ne conduc la următoarele concluzii.

În cazul c) avem: $f(x_0) < 0$, adică $x_0 > \bar{x}$, deoarece am presupus că $f'(x) < 0$, adică f este descrescătoare. Obținem și aici un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ descrescător cu limita \bar{x} .

În sfârșit în **cazul d)** $f(x_0) > 0$ și $x_0 < \bar{x}$ deoarece f este descrescătoare. În acest caz obținem din (5.5.1) un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ crescător, cu aceeași limită \bar{x} .

Cele dovedite mai sus ne arată că metoda lui Newton este convergentă către rădăcina unică $\bar{x} \in [a, b]$ a ecuației $f(x) = 0$ în toate cazurile, dacă derivatele de ordinele 1 și 2 nu se anulează pe $[a, b]$ și în plus punctul inițial $x_0 \in [a, b]$ se alege cu condiția (5.5.10).

Este clar că în toate cazurile a) - d) au loc relațiile (5.5.12).

Dacă notăm cu $K = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ și $m = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, atunci din (5.5.12) deducem:

$$(5.5.13) \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{K}{2m} |\bar{x} - x_{n-1}|^2, \quad n = 1, 2, \dots, .$$

Dacă înmulțim relațiile de mai sus cu $\frac{K}{2m}$ și presupunem că $\frac{K}{2m} |\bar{x} - x_0| = q < 1$, atunci avem:

$$(5.5.14) \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{2m}{K} q^{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots, .$$

Relația de mai sus ne oferă o evaluare a erorii apriori.

Din relația (5.3.14) și din faptul că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către \bar{x} , rezultă că pentru un $n_0 \in \mathbb{N}$ evident vom avea îndeplinită condiția

$$\frac{K}{2m} |\bar{x} - x_{n_0}| < 1$$

și deci, începând cu pasul n_0 , convergența sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de (5.5.1) este pătratică, adică ordinul de convergență este 2.

O îmbunătățire a vitezei de convergență a metodei lui Newton se obține prin construcția sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ de aproximății, folosind aşa numita metodă Newton-Halley.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ despre care presupunem $f \in C_{[a,b]}^4$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Considerăm funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de relația:

$$(5.5.15) \quad h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}.$$

Este bine cunoscut că metoda lui Halley constă în înlocuirea în metoda lui Newton a funcției f cu funcția h . Mai precis, pentru rezolvarea ecuației

$$(5.5.16) \quad f(x) = 0$$

se consideră sirul $(x_n)_{n \geq 0}$, dat de relațiile

$$(5.5.17) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots, .$$

După cum vom vedea în cele ce urmează, avantajul metodei (5.5.17), în ceea ce privește ordinul de convergență, față de metoda lui Newton, se datorează faptului că funcția h se bucură de proprietatea $h''(\bar{x}) = 0$, unde \bar{x} este rădăcina ecuației (5.5.16).

Derivatele de ordinul 1 și 2 ale funcției h au forma:

$$(5.5.18) \quad h'(x) = \frac{2[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{2[f'(x)]^{3/2}}$$

respectiv

$$(5.5.19) \quad h''(x) = \frac{3[f''(x)]^2 - 2f'''(x)f'(x)}{4[f'(x)]^{5/2}} f(x).$$

Din relațiile de mai sus, obținem:

$$(5.5.20) \quad h'(\bar{x}) = [f'(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}$$

și

$$(5.5.21) \quad h''(\bar{x}) = 0.$$

Pentru studiul convergenței sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, vom observa că funcția $f'''(x)$ este mărginită pe $[a, b]$. De asemenea vom presupune că ecuația (5.5.16) are o singură rădăcină $\bar{x} \in [a, b]$ care, conform ipotezei $f'(x) > 0$ este unică. Notăm cu $\Delta = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ unde $\delta > 0$ este un număr real pentru care $\Delta \subseteq [a, b]$.

În ceea ce privește convergența metodei (5.5.17), are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.5.3. Dacă funcția f și numărul δ verifică condițiile:

- i. intervalul $\Delta \subseteq [a, b]$;
- ii. $f \in C_{(\Delta)}^4$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \Delta$;
- iii. numerele $M = \sup_{n \in \Delta} |h'''(x)|$, $m = \inf_{n \in \Delta} |h'(x)|$ și elementul inițial $x_0 \in \Delta$, verifică condițiile:

$$m > 0 \quad \text{și} \quad q = \sqrt{\frac{M}{2m}} |\bar{x} - x_0| < 1,$$

atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ generat de metoda (5.5.17) este convergent și dacă $\bar{x} = \lim x_n$, atunci $f(\bar{x}) = 0$ și au loc relațiile:

$$(5.5.22) \quad |\bar{x} - x_n| \leq \sqrt{\frac{2m}{M}} q^{3^n}, \quad n = 0, 1, \dots, .$$

Demonstrație. Deoarece funcția $f \in C_{[a,b]}^4$, rezultă fără dificultate că $h \in C_{[a,b]}^3$, deoarece am presupus $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. De aici rezultă că $M \in \mathbb{R}$ și $M > 0$. Din formula lui Taylor obținem

$$h(\bar{x}) = h(x_0) + h'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2} h''(\xi_0) |\bar{x} - x_0|^2,$$

unde ξ_0 este un punct din intervalul descris, determinat de x_0 și \bar{x} .

Din relațiile de mai sus, ținând cont de (5.5.17), pentru $n = 0$ avem:

$$(5.5.23) \quad |x_1 - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} \frac{|h''(\xi_0)|}{|h'(x_0)|} |\bar{x} - x_0|^2.$$

Deoarece $h''(\bar{x}) = 0$ și $\xi_0 \in [x_0, \bar{x}]$ dacă $x_0 < \bar{x}$ sau $\xi_0 \in [\bar{x}, x_0]$ dacă $\bar{x} < x_0$, rezultă relația

$$|h''(\xi_0)| = |h''(\xi_0) - h''(\bar{x})| \leq |h'''(\eta_0)| |\xi_0 - \bar{x}| < M |\bar{x} - x_0|,$$

deoarece η_0 este cuprins în intervalul deschis determinat de ξ_0 și \bar{x} .

Din relația de mai sus și (5.5.23) deducem

$$|x_1 - \bar{x}| < \frac{M}{2m} |\bar{x} - x_0|^3$$

și de aici obținem

$$\sqrt{\frac{M}{2m}} |x_1 - \bar{x}| \leq \left(\sqrt{\frac{M}{2m}} |\bar{x} - x_0| \right)^3 \leq q^3.$$

Deoarece $q < 1$, din relația

$$\sqrt{\frac{M}{2m}} |x_1 - \bar{x}| \leq q^2 \sqrt{\frac{M}{2m}} |\bar{x} - x_0|$$

rezultă că $|x_1 - \bar{x}| \leq |\bar{x} - x_0| \leq \delta$, ceea ce ne arată că $x_1 \in \Delta$.

Fie $x_0, x_1, \dots, x_s \in \Delta$, atunci pentru x_{s+1} procedând ca mai sus obținem

$$|x_{s+1} - \bar{x}| \leq \frac{|h''(\xi_s)|}{2|h'(x_s)|} |\bar{x} - x_s|^2 ,$$

unde ξ_s este cuprins în intervalul deschis determinat de x_s și \bar{x} , deci $|\xi_s - \bar{x}| < |x_s - \bar{x}|$.

De asemenea se deduce ușor relația

$$|h''(\xi_s)| < M |\bar{x} - x_s|$$

ținând cont că $h''(\bar{x}) = 0$. Este atunci clară relația

$$|x_{s+1} - \bar{x}| < \frac{M}{2m} |\bar{x} - x_s|^3$$

și deci relațiile

$$(5.5.24) \quad |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \bar{x}|^3 ,$$

au loc pentru orice $n = 0, 1, \dots$.

Din (5.5.24) rezultă fără dificultate relația (5.5.22). Dacă în (5.5.22) trecem la limită pentru $n \rightarrow \infty$ și ținem cont că $0 < q < 1$, rezultă $\lim x_n = \bar{x}$.

Folosind faptul că $m > 0$ și trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$ în (5.5.17), obținem $h(\bar{x}) = 0$, ceea ce ne conduce la $f(\bar{x}) = 0$.

5.6 Convergența metodelor de tip interpolator

În acest paragraf vom studia convergența metodelor de iterare ce decurg din polinoamele de interpolare inversă cu noduri simple de tip Lagrange și cu noduri multiple respectiv de tip Hermite.

În paragraful 4.4 am descris metoda iterativă ce decurge din polinomul de interpolare inversă al lui Lagrange.

Fie deci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că f este bijectivă, adică există $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow [a, b]$.

Presupunem că f are o rădăcină $\bar{x} \in [a, b]$ și conform ipotezei de mai sus \bar{x} este unică. Considerăm $n + 1$ aproximări initiale ale lui \bar{x} , fie acestea x_i , $i = \overline{1, n+1}$, $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$. Așa cum am văzut, (4.1.2) ne oferă o nouă aproximare pentru \bar{x} . Fie aceasta x_{n+2} , dată de relația

$$(5.6.1) \quad x_{n+2} = -\omega_1(0) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{y_i \omega'_1(y_i)}$$

unde $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$ și $\omega_1(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)$.

În general, dacă $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}$ sunt $n + 1$ aproximări distincte ale lui \bar{x} , următoarea aproximare va avea forma:

$$(5.6.2) \quad x_{k+n+1} = -\omega_k(0) \sum_{i=k}^{n+k} \frac{x_i}{y_i \omega'_k(y_i)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

unde $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{k, n+k}$ și $\omega_k(y) = \prod_{i=k}^{n+k} (y - y_i)$.

Dacă presupunem acum că f este derivabilă până la ordinul $n+1$ inclusiv pe $[a, b]$ și $f'(x) \neq 0$ pentru $x \in [a, b]$, atunci f^{-1} conform cu paragraful 2.3, are aceeași proprietate și deci cu ajutorul restului în formula lui Lagrange putem determina o margine superioară pentru diferența $|\bar{x} - x_{k+n+1}|$.

Deoarece $\bar{x} = f^{-1}(0)$, avem:

$$(5.6.3) \quad |\bar{x} - x_{k+n+1}| \leq \frac{\left| [f^{-1}(\xi_k)]^{(n+1)} \right|}{(n+1)!} |y_k| |y_{k+1}| \dots |y_{k+n}|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Dacă ținem cont de relația

$$|\bar{x} - x_{n+k+1}| = \frac{|y_{n+k+1}|}{|f'(\eta_k)|}$$

unde η_k este un punct din intervalul determinat de \bar{x} și x_{n+k+1} , atunci din (5.6.3) obținem:

$$|f(x_{n+k+1})| \leq \frac{f'(\eta_k) [f^{-1}(\xi_k)]^{(n+1)}}{(n+1)!} |f(x_1)| |f(x_{k+1})| \dots |f(x_{k+n})|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Fie $M = \sup_{y \in f[a, b]} |[f^{-1}(y)]^{(n+1)}|$ și $m = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Atunci din relația de mai sus obținem:

$$(5.6.4) \quad |f(x_{n+k+1})| \leq \frac{mM}{(n+1)!} |f(x_k)| |f(x_{k+1})| \dots |f(x_{n+k})|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Presupunem că elementele sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, rămân în intervalul $[a, b]$. Înmulțim relațiile (5.6.4) cu factorul $\left(\frac{mM}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}}$ și notăm cu $\rho_i = \left(\frac{mM}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}} |f(x_i)|$, $i \in \mathbb{N}$. În acest caz (5.6.4) va avea forma

$$(5.6.5) \quad \rho_{n+k+1} \leqq \rho_k \rho_{k+1} \dots \rho_{k+n}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

În continuare considerăm ecuația:

$$(5.6.6) \quad t^{n+1} - t^n - t^{n-1} - \dots - t - 1 = 0$$

despre care, aşa cum am arătat în paragraful 5.1, stim că admite o singură rădăcină pozitivă $t_0 \in \left(\frac{2(n+1)}{n+2}, 2\right)$.

Presupunem că ρ_i , $i = \overline{1, n+1}$ verifică relațiile

$$(5.6.7) \quad \rho_i \leqq d_0^{t_0^{i-1}}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

unde $0 < d_0 < 1$.

Din (5.6.5) pentru $k = 1$, ținând cont de (5.6.6) și (5.6.7), obținem:

$$\rho_{n+2} \leqq d_0^{1+t_0+\dots+t_0^n} = d_0^{t_0^{n+1}}.$$

Dacă acum presupunem că au loc relațiile

$$\rho_{k+s} \leqq d_0^{t_0^{k+s-1}}, \quad s = \overline{0, n},$$

atunci din (5.6.5), procedând ca mai sus, deducem:

$$\rho_{n+k+1} \leqq d_0^{t_0^{k-1} + t_0^k + t_0^{k+1} + \dots + t_0^{k+n-1}} = d_0^{t_0^{k-1}(1+t_0+\dots+t_0^n)} = d_0^{t_0^{k+n}}.$$

Din cele de mai sus rezultă că pentru orice $p \in \mathbb{N}$ au loc relațiile

$$(5.6.8) \quad \rho_p \leqq d_0^{t_0^{p-1}}$$

Dacă ținem cont de (5.6.8) rezultă relația

$$\lim \rho_p = 0,$$

ceea ce ne conduce la relația:

$$\lim |f(x_p)| = 0,$$

de unde, dacă ținem cont de faptul că f este bijectivă, rezultă:

$$\lim x_p = \bar{x}.$$

Să considerăm acum relațiile (5.6.3) pentru $k = 1$. Este ușor de văzut că are loc relația:

$$(5.6.9) \quad |\bar{x} - x_{n+2}| \leq \frac{Mm^{n+1}}{(n+1)!} |\bar{x} - x_1| |\bar{x} - x_2| \dots |\bar{x} - x_{n+1}|.$$

Notând cu $\delta_i = m \left(\frac{Mm}{(n+1)!} \right)^{\frac{1}{n}} |x - x_i|$, $i = \overline{1, n+1}$, din (5.6.9) deducem

$$(5.6.10) \quad \delta_{n+2} \leq \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_{n+1}.$$

Fie $\Delta = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subseteq [a, b]$, unde $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Presupunem că există $q \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$, astfel încât nodurile inițiale x_i , $i = \overline{1, n+1}$ verifică relațiile

$$(5.6.11) \quad |x_i - \bar{x}| \leq \left[\frac{(n+1)!}{mM} \right]^{\frac{1}{n}} q^{i-1},$$

atunci din (5.6.10) deducem:

$$\delta_{n+2} \leq q \cdot q^{t_0} \cdot q^{t_0^2} \dots q^{t_0^n} = q^{t_0^{n+1}},$$

adică

$$(5.6.12) \quad |x_{n+2} - \bar{x}| \leq \left[\frac{(n+1)!}{mM} \right]^{\frac{1}{n}} q^{t_0^{n+1}}.$$

Admitem în continuare că are loc relația

$$(5.6.13) \quad \left[\frac{(n+1)!}{mM} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{m} \leq \delta.$$

Atunci din (5.6.12) deducem relația $x_{n+2} \in \Delta$. Din (5.6.11), în ipoteza (5.6.13), rezultă că și nodurile inițiale $x_i \in \Delta$, $i = \overline{1, n+1}$. Fie $k \in \mathbb{N}$ și fie $\delta_k \leq q^{t_0^{k-1}}$, $\delta_{k+1} \leq q^{t_0^k}, \dots, \delta_{k+n} \leq q^{t_0^{k+n-1}}$. Atunci din (5.6.3), ținând cont de notațiile adoptate, rezultă relația

$$\delta_{n+k+1} \leq \delta_k \cdot \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n} \leq q^{t_0^{k-1}(1+t_0+t_0^2+\dots+t_0^n)} = q^{t_0^{n+k}}$$

adică $\delta_{n+k+1} \leq q^{t_0^{n+k}}$, ceea ce ne arată că pentru orice $p = \overline{1, n+k+1}$ $x_p \in \Delta$. Mai mult, au loc relațiile

$$\delta_p \leq q^{t_0^{p-1}},$$

pentru orice $p = 1, 2, \dots$. Evident, din $\lim \delta_p = 0$ rezultă $\lim x_p = \bar{x}$. O evaluare apriorii a erorii este dată de relațiile:

$$(5.6.14) \quad |x_p - \bar{x}| \leq \left[\frac{(n+1)!}{Mm} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{m} q^{t_0^{p-1}}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

Deoarece t_0 verifică relațiile $\frac{2(n+1)}{n+2} < t_0 < 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este clar că ordinul de convergență al metodelor de iterare ce decurg din polinomul de interpolare inversă a lui Lagrange, nu poate trece peste 2.

În paragraful următor vom da o metodă prin care ordinul de convergență al procedeului de iterare descris în acest paragraf poate fi cel puțin egal cu numărul de noduri folosite în construcția polinomului lui Lagrange. Înainte de aceasta, vom pune în evidență două cazuri particulare ale metodei descrise în acest paragraf. Mai întâi vom considera cazul $n = 1$, adică polinomul de interpolare inversă al lui Lagrange cu 2 noduri. În acest caz, din (5.6.2) obținem:

$$(5.6.15) \quad x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})}{[x_k, x_{k+1}, f]}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

adică metoda coardei. Pentru $n = 2$ tot din (5.6.2) considerând forma lui Newton a polinomului lui Lagrange și ținând cont de relația

$$[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}; f^{-1}] = \frac{-[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]}{[x_k, x_{k+1}; f][x_k, x_{k+2}; f][x_{k+1}x_{k+2}; f]},$$

obținem:

$$(5.6.16) \quad x_{k+3} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_k, x_{k+1}; f]} - \frac{[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]f(x_k)f(x_{k+1})}{[x_k, x_{k+1}; f][x_k, x_{k+2}; f][x_{k+1}x_{k+2}; f]}, \\ x_1, x_2, x_3 \in [a, b], \quad k = 1, 2, \dots.$$

În cazul metodei (5.6.15), presupunând că f este derivabilă până la ordinul 2 inclusiv, vom nota cu $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ și $m_1 = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Atunci din identitatea lui Newton pentru $x_1, x_2, \bar{x} \in [a, b]$ rezultă:

$$f(\bar{x}) = f(x_1) + [x_1, x_2; f](\bar{x} - x_1) + [\bar{x}, x_1, x_2; f](\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2).$$

Presupunem acum că $m_1 > 0$ și $f(\bar{x}) = 0$ și dacă ținem cont de (5.6.15) pentru $k = 1$, din relația de mai sus obținem:

$$[x_1, x_2; f](\bar{x} - x_3) + [\bar{x}, x_1, x_2; f](\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) = 0.$$

Din această relație, ținând cont de notațiile adoptate, avem:

$$(5.6.17) \quad |\bar{x} - x_3| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_1| |\bar{x} - x_2|.$$

Fie t_1 rădăcina pozitivă a ecuației

$$t^2 - t - 1 = 0,$$

adică $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și $\delta_1 = \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_1|$, $\delta_2 = \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_2|$, atunci dacă $\delta_3 = \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_3|$, din (5.6.17) rezultă

$$(5.6.18) \quad \delta_3 \leq \delta_1 \delta_2.$$

Presupunem acum că δ_1, δ_2 verifică relațiile

$$\delta_1 \leq q, \quad \delta_2 \leq q^{t_1}$$

unde $0 < q < 1$. Atunci din (5.6.18) rezultă

$$\delta_3 \leq q^{1+t_1} = q^{t_1^2}.$$

Fie $\varepsilon = \frac{2m_1}{M_2} q$ și $\Delta = [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \subseteq [a, b]$. Dacă ținem cont de notațiile introduse, rezultă imediat relațiile

$$x_1, x_2, x_3 \in \Delta.$$

Fie acum $x_i \in \Delta$, $i = \overline{1, n}$ și $\delta_i = \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_i| \leq q^{t_1^{i-1}}$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Atunci pentru $i = n + 1$ avem

$$f(\bar{x}) = f(x_{n-1}) + [x_{n-1}, x_n; f](\bar{x} - x_{n-1}) + [\bar{x}, x_{n-1}, x_n; f](\bar{x} - x_{n-1})(\bar{x} - x_n),$$

de unde ținând cont de (5.6.15) pentru $k = n - 1$ obținem

$$[x_{n-1}, x_n; f](\bar{x} - x_{n+1}) + [\bar{x}, x_{n-1}, x_n; f](\bar{x} - x_{n-1})(\bar{x} - x_n) = 0$$

adică

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\bar{x} - x_{n-1}| |\bar{x} - x_n|.$$

Din relația de mai sus deducem

$$(5.6.19) \quad \delta_{n+1} \leq \delta_{n-1} \delta_n \leq q^{t_1^{n-2}} \cdot q^{t_1^{n-1}} = q^{t_1^{n-2}(1+t_1)} = q^{t_1^n},$$

unde $\delta_{n+1} = \frac{M}{2m_1} |\bar{x} - x_{n+1}|$.

Rezultă atunci fără dificultate că

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{2m_1}{M} q^{t_1^n} < \varepsilon$$

deci $x_{n+1} \in \Delta$.

Din relația

$$(5.6.20) \quad |\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{2m_1}{M} q^{t_1^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

pentru $n \rightarrow \infty$ rezultă $\lim x_n = \bar{x}$.

Relațiile (5.6.20) ne oferă și o margine a erorii la fiecare pas de iterație.

În acest caz, rădăcina $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ne dă informații asupra ordinului de convergență al metodei coardei. O variantă mai slabă din punctul de vedere al ordinului de convergență ar fi aceea în care un nod de interpolare se păstrează fix în decursul iterărilor.

Pentru fixarea ideilor să presupunem că f este funcție crescătoare și convexă, adică $f'(x) > 0$ și $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ și să considerăm sirul $(x_k)_{k \geq 1}$ generat de relațiile:

$$(5.6.21) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_k, b; f]}, \quad x_1 < \bar{x} < b, \quad k = 1, 2, \dots$$

sau echivalent

$$(5.6.22) \quad x_{k+1} = b - \frac{f(b)}{[x_k, b; f]}, \quad x_1 < \bar{x} < b, \quad k = 1, 2, \dots$$

Arătăm că în acest caz sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ generat cu oricare din relațiile (5.6.21) sau (5.6.22) este strict crescător și mărginit superior chiar de \bar{x} și $\lim x_n = \bar{x}$.

Într-adevăr din $x_1 < \bar{x}$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, rezultă $f(x_1) < 0$. De asemenea este adevărată relația $[x_1, b; f] > 0$ și deci

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{[x_1, b; f]} > x_1.$$

În continuare arătăm că $x_2 < b$. Această relație rezultă din faptul că $f(b) > 0$ și din (5.6.22) pentru $k = 1$. Mai mult, dacă ținem cont de relațiile

$$f(\bar{x}) = f(x_1) + [x_1, b; f](\bar{x} - x_1) + [\bar{x}, x_1, b; f](\bar{x} - x_1)(\bar{x} - b)$$

obținem

$$\bar{x} - x_2 = -\frac{[\bar{x}, x_1, b; f]}{[x_1, b; f]} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - b)$$

de unde, ținând cont și de faptul că $[\bar{x}, x_1, b; f] > 0$, rezultă:

$$x_2 < \bar{x}.$$

Presupunem că au loc relațiile:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < \bar{x}.$$

Procedând cu x_n așa cum am procedat cu x_1 , arătăm că $x_n < x_{n+1} < \bar{x}$.

Este clar acum că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și fie $l = \lim x_n$. Dacă trecem la limită pentru $k \rightarrow \infty$ în (5.6.21), obținem $l = \bar{x}$, deoarece în ipotezele impuse \bar{x} este unică rădăcină a ecuației $f(x) = 0$. Considerații analoage cu cele de mai sus se pot face și în cazurile:

a) $f'(x) > 0$ și $f''(x) < 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. În acest caz sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, generat de relațiile:

$$(5.6.23) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[a, x_k; f]}, \quad a < \bar{x} < x_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

este descrescător și mărginit inferior.

b) $f'(x) < 0$ și $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. În acest caz sirul generat de (5.6.23) are aceeași proprietate ca la cazul a).

c) $f'(x) < 0$ și $f''(x) < 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. În acest caz sirul (5.6.21) este crescător și mărginit superior.

În concluzie, cele 2 metode cu un nod fix studiate mai sus, în ipotezele $f'(x) \neq 0$ și $f''(x) \neq 0$ pentru $x \in [a, b]$, conduc la siruri monotone și mărginite, convergente către soluția \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$.

Ne oprim acum asupra sirului $(x_n)_{n \geq 1}$, generat de (5.6.16).

Presupunem că f este derivabilă până la ordinul 3 inclusiv pe $[a, b]$. De aici rezultă că și f^{-1} este derivabilă până la ordinul 3 pe imaginea lui $[a, b]$ prin f și are loc relația

$$(f^{-1}(y))''' = -\frac{f'''(x)f'(x) - 3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}$$

unde $y = f(x)$. Fie $M_3 = \sup_{x \in [a, b]} |f'''(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ și $M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ și $m_1 = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, atunci din relația de mai sus rezultă

$$\sup_{y \in I} [f^{-1}(y)]''' \leqq \frac{M_3 M_1 + 3M_2^2}{m_1^5}$$

unde $I = f([a, b])$.

Fie $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, 3 aproximări initiale ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$ și $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ valorile lui f pe aceste rădăcini. Din relația:

$$(5.6.24) \quad f^{-1}(0) = x_1 - [y_1, y_2; f^{-1}]f(x_1) + [y_1, y_2, y_3; f^{-1}]f(x_1)f(x_2) + [y_1, y_2, y_3, 0; f^{-1}]f(x_1)f(x_2)f(x_3).$$

care rezultă din identitatea lui Newton pentru funcția f^{-1} , dacă notăm cu

$$x_4 = x_1 - [y_1, y_2; f^{-1}]f(x_1) + [y_1, y_2, y_3; f^{-1}]f(x_1)f(x_2)$$

rezultă:

$$(5.6.25) \quad |\bar{x} - x_4| \leq \frac{\lambda}{3!} |f(x_1)||f(x_2)||f(x_3)|,$$

$$\text{unde } \lambda = \frac{M_3 M_1 + 3M_2^2}{m_1^5}.$$

Din (5.6.25) deducem relația

$$(5.6.26) \quad |\bar{x} - x_4| \leq \frac{\lambda M_1^3}{6} |\bar{x} - x_1||\bar{x} - x_2||\bar{x} - x_3|.$$

Dacă înmulțim relația (5.6.26) cu $\frac{M_1 \sqrt{M_1 \lambda}}{\sqrt{6}}$ și notăm $\delta_i = M_1 \sqrt{\frac{M_1 \lambda}{6}} |x_i - \bar{x}|$, $i = \overline{1, 4}$, avem

$$(5.6.27) \quad \delta_4 \leq \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

Fie ecuația

$$(5.6.28) \quad t^3 - t^2 - t - 1 = 0$$

și $t_0 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ singura rădăcină pozitivă a acesteia. Presupunem că $\delta_1 \leq d$, $\delta_2 \leq d^{t_0}$ și $\delta_3 \leq d^{t_0^2}$, unde $0 < d < 1$, atunci din (5.6.28) rezultă:

$$\delta_4 \leq d^{1+t_0+t_0^2} = d^{t_0^3}.$$

Fie acum $x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \in [a, b]$ trei aproximări ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$. Atunci procedând ca la (5.6.24), obținem o nouă aproximare cu formula:

$$(5.6.29) \quad x_{k+3} = x_k - [y_k, y_{k+1}; f^{-1}]f(x_k) + [y_k, y_{k+1}, y_{k+2}; f^{-1}]f(x_k)f(x_{k+1}),$$

unde $y_k = f(x_k)$, $y_{k+1} = f(x_{k+1})$, $y_{k+2} = f(x_{k+2})$.

Procedând ca mai sus și notând cu

$$\delta_i = M_1 \sqrt{\frac{M_1 \lambda}{6}} |x_i - \bar{x}|, \quad i = k, k+1, k+2, k+3,$$

din identitatea lui Newton deducem:

$$(5.6.30) \quad \delta_{k+3} \leq \delta_k \delta_{k+1} \delta_{k+2}.$$

Presupunem că au loc relațiile $\delta_i \leq d^{t_0^{i-1}}$, $i = k, k+1, k+2$, ținem cont de (5.6.30) și (5.6.28) și avem:

$$(5.6.31) \quad \delta_{k+3} \leq d^{t_0^{k+2}}.$$

Este clar că în ipoteza că elementele sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ generat de (5.6.16) rămân în intervalul $[a, b]$, relația (5.6.31) rămâne adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Din (5.6.31), ținând cont de notațiile introduse, prin trecere la limită pentru $k \rightarrow \infty$, rezultă:

$$(5.6.32) \quad \lim x_k = \bar{x}$$

și pentru evaluarea erorii, din (5.6.31) rezultă relația

$$(5.6.33) \quad |\bar{x} - x_k| \leq \sqrt{\frac{6}{M_1 \lambda}} \cdot \frac{1}{M_1} d^{t_0^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

În continuare ne vom ocupa de convergența metodelor de iterare ce se obțin din polinomul de interpolare inversă al lui Hermite.

Fie ecuația

$$(5.6.34) \quad f(x) = 0$$

unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ până la ordinul $m + 1$ inclusiv. În ipoteza că ecuația (5.6.34) are pe intervalul (a, b) o soluție \bar{x} și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, ținând cont de cele introduse în paragraful 4.8, vom studia convergența sirului $(x_p)_{p \geq 1}$, dat de relația (4.8.4).

Din formula lui Hermite rezultă relațiile

$$(5.6.35) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= f^{-1}(0) = H(y_k, a_1; y_{k+1}, a_2; \dots; y_{k+n}, a_{n+1}; f^{-1}|0) + \\ &+ \frac{[f^{-1}(\eta)]^{(m+1)}}{(m+1)!} [f(x_k)]^{a_1} [f(x_{k+1})]^{a_2} \dots [f(x_{k+n})]^{a_{n+1}}, \end{aligned}$$

pentru orice $k = 1, 2, \dots$, unde $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$.

În relațiile (5.6.35), η este un punct din intervalul $[c, d] = f([a, b])$.

Dacă ținem cont de (4.8.4) și notăm

$$M = \sup_{y \in [c, d]} \left| [f^{-1}(y)]^{(m+1)} \right|,$$

atunci din (5.6.35) deducem relațiile:

$$(5.6.36) \quad |\bar{x} - x_{k+n+1}| \leq \frac{M}{(m+1)!} |f(x_k)|^{a_1} |f(x_{k+1})|^{a_2} \dots |f(x_{k+n})|^{a_{n+1}},$$

pentru $k = 1, 2, \dots$.

Notăm în continuare cu $q = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ și atunci din (5.6.36) rezultă

$$(5.6.37) \quad |\bar{x} - x_{k+n+1}| \leq \frac{Mq^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - x_k|^{a_1} |\bar{x} - x_{k+1}|^{a_2} \dots |\bar{x} - x_{k+n}|^{a_{n+1}},$$

$k = 1, 2, \dots$.

Înmulțind (5.6.37) cu $q \left[\frac{Mq}{(m+1)!} \right]^{\frac{1}{m}}$ și notând cu

$$(5.6.38) \quad \rho_i = q \left[\frac{Mq}{(m+1)!} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

obținem relațiile

$$(5.6.39) \quad \rho_{k+n+1} \leq \rho_k^{a_1} \cdot \rho_{k+1}^{a_2} \dots \rho_{k+n}^{a_{n+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Considerăm ecuația

$$(5.6.40) \quad t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0$$

și notăm cu ω unica rădăcină pozitivă a acestei ecuații (Teorema 5.1.6).

Presupunem acum că aproximările inițiale x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ale lui \bar{x} sunt alese astfel încât ele verifică relațiile:

$$(5.6.41) \quad \rho_1 \leq d, \quad \rho_2 \leq d^\omega, \quad \rho_3 \leq d^{\omega^2}, \dots, \quad \rho_{n+1} \leq d^{\omega^n},$$

unde $0 < d < 1$.

Din (5.6.39), pentru $k = 1$ obținem:

$$\rho_{n+2} \leq d^{\omega^{n+1}}.$$

Este ușor de văzut că în general au loc relațiile:

$$(5.6.42) \quad \rho_{n+k+1} \leq d^{\omega^{n+k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Pentru $k \rightarrow \infty$, din (5.6.42) se deduce imediat că are loc egalitatea

$$\lim x_{n+k+1} = \bar{x}.$$

Se observă din cele relatate mai sus, că ordinul de convergență al metodei de iterare (4.8.4) este egal cu rădăcina pozitivă a ecuației (5.6.40).

5.7 Convergența monotonă a metodelor de tip Aitken-Steffensen

Din punct de vedere practic, pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuații, sunt avantajoase unele metode ce conduc la siruri monotone, care converg către rădăcinile în cauză.

În acest paragraf vom arăta că în anumite condiții, metodele de tip Aitken-Steffensen conduc la 2 siruri și anume, un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ crescător și celălalt $(y_n)_{n \geq 0}$ descrescător, ambele convergente către soluția \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$.

Astfel de metode au avantajul că la fiecare pas de iterare avem un control asupra erorilor, adică au loc relațiile:

$$(5.7.1) \quad \max \{ \bar{x} - x_n, \bar{x} - y_n \} \leq y_n - x_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

Așa cum am văzut în paragrafele anterioare, astfel de siruri pot fi generate dacă, de exemplu, aplicăm simultan metoda lui newton și metoda coardei.

În condiții similare cu cele impuse celor două metode amintite, vom arăta că metodele de tip Aitken-Steffensen generează două siruri ale căror elemente aproximează prin lipsă, respectiv adaos, rădăcina unei ecuații date.

Fie $I = [a, b]$, $a < b$ un interval al axei reale și fie

$$(5.7.2) \quad f(x) = 0$$

o ecuație, unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alături de (5.7.2) considerăm încă două ecuații:

$$(5.7.3) \quad \begin{aligned} x - g_1(x) &= 0 \\ x - g_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

unde $g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$. Presupunem că ecuațiile (5.7.2) și (5.7.3) sunt echivalente.

Metoda lui Aitken-Steffensen constă în construcția sirurilor $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ și $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$ cu ajutorul următoarei metode de iterare

$$(5.7.4) \quad x_{n+1} = g_1(x_n) - \frac{f(g_1(x_n))}{[g_1(x_n), g_2(g_1(x_n)); f]}, \quad x_0 \in I, n = 0, 1, \dots.$$

Fie $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. În ceea ce privește noțiunile de monotonie și convexitate ale funcției g , vom adopta următoarele definiții:

Definiția 5.7.1. Funcția $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește crescătoare (nedescrescătoare, descrescătoare, necrescătoare) dacă pentru orice $x, y \in I$ au loc, respectiv, relațiile: $[x, y; f] > 0$ (≥ 0 ; < 0 ; ≤ 0).

Definiția 5.7.2. Funcția $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă (neconcavă, concavă, neconvexă) pe I , dacă pentru orice $x, y, z \in I$ au loc, respectiv, relațiile: $[x, y, z; f] > 0$ (≥ 0 ; < 0 ; ≤ 0).

În cele ce urmează vom adopta următoarele ipoteze asupra funcțiilor f , g_1 și g_2 :

- a) f, g_1, g_2 sunt funcții continue pe I ;
- b) g_1 este funcție crescătoare pe I ;
- c) g_2 este funcție descrescătoare pe I ;
- d) ecuațiile (5.7.2) și (5.7.3) au rădăcina comună unică $\bar{x} \in I$;
- e) pentru orice $x, y \in I$ are loc relația $0 < [x, y; g_1] \leq 1$.

Relativ la sirurile $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ și $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$ generate de (5.7.4) are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.7.1. Dacă funcțiile f, g_1 și g_2 verifică ipotezele a) - e) și încă plus sunt verificate condițiile:

i₁. f este crescătoare și convexă pe I și există $f'(\bar{x})$;

ii₁. există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) < 0$ și $g_2(g_1(x_0)) \in I$.

Atunci sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ și $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$, generate de (5.7.4) unde x_0 verifică ipoteza ii₁, au următoarele proprietăți:

j₁. sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ sunt crescătoare și mărginite;

jj₁. sirul $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$ este descrescător și mărginit;

jjj₁. $\lim x_n = \lim g_1(x_n) = \lim g_2(g_1(x_n)) = \bar{x}$;

jv₁. $x_n \leq g_1(x_n) \leq x_{n+1} \leq \bar{x} \leq g_2(g_1(x_n))$, $n = 0, 1, \dots$;

v₁. $\max\{\bar{x} - x_{n+1}, g_2(g_1(x_n)) - \bar{x}\} \leq g_2(g_1(x_n)) - x_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

Demonstratie. Deoarece f este crescătoare pe I și $f(x_0) < 0$ atunci $x_0 < \bar{x}$. Pentru $x, y \in I$, $x < y$, din ipoteza e) rezultă $g_1(y) - g_1(x) \leq y - x$ și de aici pentru $y = \bar{x}$ rezultă $x - g_1(x) \leq 0$.

Fie $p(x) = x - g_1(x)$, atunci pentru orice $x, y \in I$ avem $[x, y; p] = 1 - [x, y; g_1] \geq 0$, conform cu ipoteza e). Se vede clar acum că dacă $x < \bar{x}$, atunci $p(x) \leq 0$ și dacă $x > \bar{x}$, atunci $p(x) \geq 0$.

Din ipoteza b) și din $x_0 < \bar{x}$ rezultă $g_1(x_0) < g_1(\bar{x})$, adică $g_1(x_0) < \bar{x}$. Din $x_1 < \bar{x}$ și $p(x_0) \leq 0$ rezultă că $x_0 \leq g_1(x_0)$. Din c) și $g_1(x_0) < \bar{x}$ rezultă $g_2(g_1(x_0)) > \bar{x}$.

Folosind i_1 . și relația $g_1(x_0) < \bar{x}$ rezultă că are loc inegalitatea $f(g_1(x_0)) < 0$. Din ultima relație și din inegalitatea $[g_1(x_0), g_2(g_1(x_0)); f] > 0$ rezultă că $x_1 > g_1(x_0)$ și deci avem relațiile

$$(5.7.5) \quad x_0 \leq g_1(x_0) < x_1$$

Este ușor de văzut că au loc următoarele identități

$$(5.7.6) \quad g_1(x) - \frac{f(g_1(x))}{[g_1(x); g_2(g_1(x)); f]} = g_2(g_1(x)) - \frac{f(g_2(g_1(x)))}{[g_1(x), g_2(g_1(x)); f]},$$

$$(5.7.7) \quad f(z) = f(x) + [x, y; f](x - x) + [x, y, z; f](z - x)(z - y),$$

pentru orice $x, y, z \in I$.

Deoarece $g_2(g_1(x_0)) > \bar{x}$ rezultă că $f(g_2(g_1(x_0))) > 0$ și deci ținând cont de (5.7.6), rezultă că $g_2(g_1(x_0)) > x_1$.

Din (5.7.7), pentru $z = x_1$, $x = g_1(x_0)$, $y = g_2(g_1(x_0))$ și din (5.7.4) rezultă relația:

$$(5.7.8) \quad f(x_1) = [g_1(x_0), g_2(g_1(x_0)), x_1; f](x_1 - g_1(x_0))(x_1 - g_2(g_1(x_0)))$$

de unde deducem relația $f(x_1) < 0$, adică $x_1 < \bar{x}$.

Din ultima relație și (5.7.5) avem

$$(5.7.9) \quad x_0 \leq g_1(x_0) < x_1 < \bar{x} < g_2(g_1(x_0)).$$

Dacă arătăm că $g_2(g_1(x_1)) \in I$, atunci este clar că x_1 verifică ipoteza ii_1 . Într-adevăr, deoarece g_2 este descrescătoare și g_1 crescătoare, din $x_1 > x_0$ rezultă $g_1(x_0) < g_1(x_1)$ și $g_2(g_1(x_1)) < g_2(g_1(x_0))$. Din $g_1(x_1) < \bar{x}$ rezultă $g_2(g_1(x_1)) > g_2(\bar{x}) = \bar{x}$, adică $g_2(g_1(x_1)) \in I$.

Fie acum $x_n \in I$ pentru care $f(x_n) < 0$ și $g_2(g_1(x_n)) \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Repetând raționamentul de mai sus pentru x_n este clar că vom obține

$$(5.7.10) \quad x_n \leq g_1(x_n) < x_{n+1} < \bar{x} < g_2(g_1(x_n)) \leq g_2(g_1(x_{n-1})),$$

pentru orice $n = 0, 1, \dots$, adică proprietățile j_1 și jj_1 .

Dovedim în continuare relațiile j_{jj_1} . Din relațiile $x_n \leq g_1(x_n) < x_{n+1}$, dacă notăm cu $l_1 = \lim x_n$ și $l_2 = \lim g_1(x_n)$, atunci rezultă $l_1 = l_2$ și din continuitatea lui g_1 rezultă $l_1 = \lim g_1(x_n) = g_1(l_1)$, adică $l_1 = \bar{x} = l_2$. Fie $l_3 = \lim g_2(g_1(x_n))$, atunci rezultă că are loc relația $l_3 = g_2(\bar{x}) = \bar{x}$.

Din (5.7.10) rezultă relațiile jv_1 . și v_1 . Cu aceasta teorema este dovedită.

În mod analog se demonstrează și următoarele teoreme

Teorema 5.7.2. *Dacă funcțiile f, g_1 și g_2 verifică ipotezele a) – e) și în plus au loc condițiile:*

- i₂. f este crescătoare și concavă pe I și există $f'(\bar{x})$;
- ii₂. există $x_0 \in I$ pentru care $f(x_0) > 0$ și $g_2(g_1(x_0)) \in I$.

Atunci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ și $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$ generate de (5.7.4) verifică următoarele proprietăți:

- j₂. $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ sunt descrescătoare și mărginite;
- jj₂. $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$ este sir crescător și mărginit;
- jjj₂. $\lim x_n = \lim g_1(x_n) = \lim g_2(g_1(x_n)) = \bar{x}$;
- jv₂. $g_2(g_1(x_n)) \leq g_2(g_1(x_{n+1})) < \bar{x} < x_{n+1} < g_1(x_n) \leq x_n$, pentru $n = 0, 1, \dots$;
- v₂. $\max\{\bar{x} - g_2(g_1(x_n)), x_{n+1} - \bar{x}\} \leq x_{n+1} - g_2(g_1(x_n))$ pentru orice $n = 0, 1, \dots$,

Teorema 5.7.3. *Dacă f, g_1 și g_2 verifică ipotezele a) – e) și în plus au loc următoarele proprietăți:*

- i₃. f este descrescătoare și convexă pe I și există $f'(\bar{x})$;
- ii₃. există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) < 0$ și $g_2(g_1(x_0)) \in I$.

Atunci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $g_1(x_n)_{n \geq 0}$, $g_2(g_1(x_n))_{n \geq 0}$, generate de (5.7.4), verifică proprietățile j₂. – v₂. din Teorema 5.7.2.

Teorema 5.7.4. *Dacă funcțiile f, g_1 și g_2 verifică ipotezele a) – e) și în plus mai verifică și următoarele proprietăți:*

- i₄. f este descrescătoare și concavă pe I și există $f'(\bar{x})$;
- ii₄. există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) > 0$ și $g_2(g_1(x_0)) \in I$.

Atunci șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ și $(g_2(g_1(x_n)))_{n \geq 0}$, generate de (5.7.4), verifică concluziile j₁. – v₁. din Teorema 5.7.1.

În cele ce urmează ne vom opri asupra unor cazuri particulare ale problemei Aitken-Steffensen (5.7.4).

Considerăm cazul particular în care $g_1(x) = x$ și notăm $g_2(x) = g(x)$, atunci obținem metoda lui Steffensen dată de relațiile

$$(5.7.11) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{[x_n, g(x_n); f]}, \quad x_0 \in I, n = 0, 1, \dots,$$

Observăm că, relativ la funcția g_1 , ipotezele a), b), d) și e) sunt automat verificate.

Pentru fixarea ideilor vom admite, în cele ce urmează, că funcțiile f și g de mai sus, verifică ipotezele

a₁) funcțiile f și g sunt continue pe I ;

b₁) funcția g este descrescătoare pe I ;

c₁) ecuațiile $f(x) = 0$ și $x = g(x)$ sunt echivalente și au rădăcina unică comună $\bar{x} \in]a, b[= Int(I)$.

În ipotezele de mai sus, următoarele consecințe, relative la convergența șurilor generate de (5.7.11), se deduc imediat din teoremele 5.7.1 - 5.7.4.

Consecință 5.7.1. *Dacă funcțiile f și g verifică condițiile a₁) – c₁) și în plus f este crescătoare și convexă pe I , există $f'(\bar{x})$, există aproximatie inițială $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) < 0$ și $g(x_0) \in I$. Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător și mărginit, sirul $(g(x_n))_{n \geq 0}$ este descrescător și mărginit. Mai mult $\lim x_n = \lim g(x_n) = \bar{x}$ și $x_n < \bar{x} < g(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, iar pentru evaluarea erorii au loc relațiile:*

$$\max\{\bar{x} - x_n, g_1(x_n) - \bar{x}\} \leq g_1(x_n) - x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Consecință 5.7.2. *Dacă f și g verifică condițiile a₁) – c₁) și în plus f este crescătoare și concavă pe I , există $f'(\bar{x})$ și $x_0 \in I$ pentru care $f(x_0) > 0$ și $g(x_0) \in I$. Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător și mărginit, sirul $(g(x_n))_{n \geq 0}$ este crescător și mărginit. În plus au loc relațiile*

$$\lim x_n = \lim g(x_n) = \bar{x};$$

$$g(x_n) < \bar{x} < x_n, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$\max\{x_n - \bar{x}, \bar{x} - g(x_n)\} \leq x_n - g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Consecință 5.7.3. *Dacă f și g verifică ipotezele a₁) – c₁) și în plus au loc proprietățile: f este descrescătoare și convexă pe I , există $f'(\bar{x})$ și există $x_0 \in I$ pentru care $f(x_0) > 0$ și $g(x_0) \in I$. Atunci au loc concluziile Consecinței 5.7.2.*

Consecință 5.7.4. *Dacă f și g verifică ipotezele a₁) – c₁) și în plus f este descrescătoare și concavă pe I , există $f'(\bar{x})$ și există $x_0 \in I$ pentru care $f(x_0) > 0$ și $g(x_0) \in I$. Atunci au loc toate concluziile Consecinței 5.7.1.*

Un caz mai particular al metodei (5.7.4) este acela când în (5.7.11) are loc relația

$$(5.7.12) \quad f(x) = x - g(x) = 0$$

În acest caz (5.7.11) va avea forma:

$$(5.7.13) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - g(x_n))^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}, \quad x_0 \in I, n = 0, 1, \dots,$$

Relativ la convergența sirurilor $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(g(x_n))_{n \geq 0}$ generate de (5.7.13) au loc următoarele consecințe:

Consecință 5.7.5. *Dacă g este continuă, descrescătoare și convexă pe I , ecuația (5.7.12) are rădăcina $\bar{x} \in (a, b) = \text{Int}(I)$, există $g'(\bar{x})$ și $x_0 \in I$ astfel încât $x_0 < g(x_0)$ și $g(x_0) \in I$. Atunci sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(g(x_n))_{n \geq 0}$ generate de (5.7.13) verifică concluzile Consecinței 5.7.1.*

Consecință 5.7.6. *Dacă g este continuă, descrescătoare și concavă pe I , există $g'(\bar{x})$ și $x_0 \in I$ pentru care $x_0 > g(x_0)$ și $g(x_0) \in I$. Atunci sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(g(x_n))_{n \geq 0}$ generate de (5.7.13) verifică concluzile Consecinței 5.7.2.*

În cele ce urmează, ecuația $f(x) = 0$ fiind dată, ne vom ocupa de determinarea funcțiilor auxiliare g_1 , g_2 și g astfel încât, în funcție de proprietățile funcției f , să fie verificate anumite ipoteze asupra funcțiilor g_1 , g_2 , respectiv g .

1. Admitem că $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă până la ordinul 2 pe (a, b) și există $f'(a)$ și $f'(b)$ derivate laterale la dreapta pe a , respectiv la stânga pe b . Admitem că f este crescătoare și convexă și ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină $\bar{x} \in (a, b)$.

În condițiile de mai sus, putem alege drept funcții g_1 și g_2 funcțiile date de relațiile

$$(5.7.13a) \quad \begin{aligned} g_1(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(b)} \\ g_2(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(a)} \end{aligned}$$

Arătăm în continuare că funcțiile g_1 și g_2 astfel alese verifică ipotezele Teoremei 5.7.1. Din faptul că f este convexă rezultă că f' este funcție crescătoare pe (a, b) . Din faptul că f este crescătoare rezultă că au loc relațiile $0 < f'(a) < f'(x) < f'(b)$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci este clar că $g'_1(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(b)} > 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ și deci g_1 este crescătoare pe (a, b) .

Analog $g'_2(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(a)} < 0$ și deci g_2 este descrescătoare pe (a, b) .

Sunt verificate deci ipotezele a) - d) premergătoare Teoremei 5.7.1. Este clar că din faptul că au loc relațiile $0 < f'(a) < f(x) < f'(b)$ pentru

$x \in (a, b)$, rezultă că are loc relația $0 < g'(x) \leq 1$ și deci, ținând cont de formula de medie pentru diferență divizată, rezultă și ipoteza e).

Observăm aici că dacă $0 < \lambda_1 < f'(a)$ și $\lambda_2 > f'(b)$, atunci și funcțiile g_1, g_2 date de relațiile $g_1(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda_2}$, $g_2(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda_1}$ verifică ipotezele a) - e) din Teorema 5.7.1.

2. Dacă f este derivabilă pe $[a, b]$, descrescătoare și convexă, atunci este ușor de văzut că g_1 și g_2 se pot alege ca în cazul 1 și ipotezele a) - e) din Teorema 5.7.3 sunt verificate.

3. Dacă f este derivabilă pe $[a, b]$, descrescătoare și concavă, atunci este ușor de văzut că putem considera $g_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(a)}$ și $g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$ și sunt verificate ipotezele a) - e) din Teorema 5.7.4.

4. Dacă f este derivabilă pe $[a, b]$, crescătoare și concavă, funcțiile g_1 și g_2 se pot alege ca la punctul 3 și ipotezele a) - e) vor fi verificate.

În ceea ce privește alegerea funcției g ce apare în procedeul lui Steffensen (5.7.11), ea poate fi aleasă după cum urmează.

1.1. Dacă f este crescătoare și convexă sau descrescătoare și convexă pe $[a, b]$, atunci punem $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(a)}$ și atunci funcția g va fi decrescătoare pe $[a, b]$ și deci sunt verificate ipotezele $a_1) - c_1)$ ale Consecinței 5.7.1 și de semenea, pentru această alegere sunt verificate aceleași ipoteze și pentru Consecința 5.7.3.

1.2. Dacă f este decrescătoare și concavă sau crescătoare și concavă, atunci vom alege $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$ și evident sunt verificate ipotezele $a_1) - c_1)$ atât pentru Consecința 5.7.2 cât și pentru Consecința 5.7.4.

În continuare vom analiza ordinul de convergență și indicele de eficiență al metodelor studiate în acest paragraf. Pentru fixarea ideilor să considerăm o ecuație, echivalentă cu ecuația (5.7.2), de format:

$$(5.7.14) \quad x - h(x) = 0$$

unde $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n \in I$, un sir care în raport cu f și h verifică proprietățile

$a_2)$ $h(x_n) \in I$ pentru orice $n = 0, 1, \dots$;

$b_2)$ $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(h(x_n))_{n \geq 0}$ sunt siruri convergente și $\lim x_n = \lim h(x_n) = \bar{x}$ unde \bar{x} este rădăcina comună a ecuațiilor (5.7.2) și (5.7.14), $\bar{x} \in (a, b)$;

$c_2)$ $[x, y; f] \neq 0$ pentru orice $x, y \in [a, b]$;

d_2 f este derivabilă pe $\bar{x} \in (a, b)$.

Analog cu Definiția 5.1.4 vom adopta pentru ordinul de convergență al sirului x_n către \bar{x} , următoarea definiție

Definiția 5.7.3. Sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ în raport cu funcția h , dacă există

$$(5.7.15) \quad \alpha = \lim \frac{\ln |h(x_n) - \bar{x}|}{\ln |x_n - \bar{x}|}$$

și $\alpha = p$.

Dacă în definiția de mai sus punem $x_{n+1} = h(x_n)$, atunci obținem noiunea de ordin de convergență dată de Definiția 5.1.4. În acest caz vom spune că h generează un sir cu ordin de convergență p .

Tinând cont de definiția de mai sus, o consecință a Teoremei 5.1.4 este următoarea:

Consecință 5.7.7. Dacă h și $(x_n)_{n \geq 0}$ verifică ipotezele a_2 – d_2 , atunci condiția necesară și suficientă pentru ca sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ să dmită ordinul de convergență p , $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, în raport cu h și f este ca să existe

$$(5.7.16) \quad \beta = \lim \frac{\ln |f(h(x_n))|}{\ln |f(x_n)|}$$

și $\beta = p$.

Fie g_1 și g_2 cele două funcții date de relațiile (5.7.3) și fie funcția h dată de relația

$$(5.7.17) \quad h(x) = g_1(x) - \frac{f(g_1(x))}{[g_1(x), g_2(g_1(x)); f]}, \quad x \in [a, b].$$

Relativ la ordinul de convergență al sirului $x_{n+1} = h(x_n)$, generat de (5.7.4), are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.7.5. Dacă funcțiile f, g_1 și g_2 verifică condițiile Teoremei 5.7.1, există $f'(\bar{x})$ și în plus sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență p_1 în raport cu g_1 și f și sirul $(g_1(x_n))_{n \geq 0}$ ordinul de convergență p_2 în raport cu g_2 , atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are ordinul de convergență $p_1(p_2 + 1)$ în raport cu funcția h dată de (5.7.17).

Demonstrație. Din ipotezele teoremei, tinând cont de Consecința 5.7.7 rezultă relațiile

$$(5.7.18) \quad \lim \frac{\ln |f(g_1(x_n))|}{\ln |f(x_n)|} = p_1$$

și

$$(5.7.19) \quad \lim \frac{\ln |f(g_2(g_1(x_n)))|}{\ln |f(g_1(x_n))|} = p_2.$$

Folosind (5.7.4), (5.7.6) și (5.7.7), obținem relațiile

$$f(x_{n+1}) = [g_1(x_n), g_2(g_1(x_n)), x_{n+1}; f] \frac{f(g_1(x_n))f(g_2(g_1(x_n)))}{[g_1(x_n), g_2(g_1(x_n)); f]^2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

unde $x_{n+1} = h(x_n)$.

Din relația de mai sus și din (5.7.18), (5.7.19) deducem imediat că are loc egalitatea

$$\lim \frac{\ln |f(h(x_n))|}{\ln |f(x_n)|} = p_1(p_2 + 1).$$

Observăm în sfârșit că concluziile Teoremei 5.7.5 rămân valabile și în cazurile în care f , g_1 și g_2 verifică ipotezele Teoremelor 5.7.2, 5.7.3 și 5.7.4.

O teoremă analogă are loc și în legătură cu sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ generat de (5.7.11).

Teorema 5.7.6. *Dacă f și g verifică ipotezele oricăreia din Consecințele 5.7.1 – 5.7.4 și în plus sirul (x_n) , generat de (5.7.11) are ordinul p în raport cu g , atunci acest sir are ordinul $p + 1$ în raport cu h , dată de*

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{[x, g(x); f]}.$$

Revenim la funcțiile g_1 și g_2 determinate în acest paragraf

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x - \frac{f(x)}{A}; \\ g_2(x) &= x - \frac{f(x)}{B}, \end{aligned}$$

unde $A = f'(b)$, $B = f'(a)$ sau $A = f'(a)$ și $B = f'(b)$, după caz. În aceste cazuri sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ corespunzătoare generate de (5.7.4) au ordinul de convergență 2.

În ceea ce privește **indicele de eficiență** al metodelor de tip Aitken-Steffensen studiate în acest paragraf, observăm următoarele:

Tinând cont de Definiția 5.1.5 și de faptul că în trecerea de la un pas de iterare la următorul cu procedeul (5.7.4), trebuie să calculăm 4 valori de funcții $g_1(x_n)$, $f(g_1(x_n))$, $g_2(g_1(x_n))$ și $f(g_2(g_1(x_n)))$, și dacă alegem g_1 și g_2 ca în (5.7.13a), atunci evident că indicele de eficiență al lui (5.7.4) este egal cu $\sqrt[4]{2}$.

Dacă însă folosim procedeul (5.7.11), atunci sunt necesare numai valorile $f(x_n)$ și $g(x_n)$, $f(g(x_n))$, adică 3 valori de funcții și pentru $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$ sau $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(a)}$ indicele de eficiență este $\sqrt[3]{2}$.

În condițiile Teoremei 5.7.5, indicele de eficiență este $\sqrt[4]{p_1(p_2 + 1)}$.

Încheiem acest paragraf cu 2 exemple numerice.

1. Considerăm ecuația

$$f(x) := x - 2 \operatorname{arctg} x = 0$$

pentru $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$. Observăm că f este crescătoare și convexă pe $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$, deoarece

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$$

dacă $x \geq \frac{3}{2}$ și

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} > 0$$

pentru $x \geq \frac{3}{2}$.

Alegem deci

$$g_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(3)};$$

$$g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Dar $f'(3) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ și $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{13}$, de unde obținem

$$g_1(x) = x - \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4} (10 \operatorname{arctg} x - x);$$

$$g_2(x) = x - \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{5}{13}} = \frac{1}{5} (26 \operatorname{arctg} x - 8x).$$

Dacă luăm $x_0 = \frac{3}{2}$, atunci funcțiile f, g_1 și g_2 verifică ipotezele Teoremei 5.7.1 pe intervalul $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

Aplicând procedeul (5.7.4), se obțin următoarele aproximări pentru rădăcina ecuației $f(x) = 0$, cuprinsă în intervalul $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ (Tabelul 1).

n	x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(g_1(x_n))$	$f(x_n)$
0	1.500000000000000	2.08198430811832	2.50854785469606	-4.6E-01
1	2.32357265230323	2.33006829103803	2.33195667567199	-5.1E-03
2	2.33112222668589	2.33112235050042	2.33112238618252	-9.9E-08
3	2.33112237041442	2.33112237041442	2.33112238041442	-3.5E-17

Tabelul 1

2. În continuare vom considera următoarea ecuație

$$f(x) = x - \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} = 0,$$

pentru $x \in [-2, -1]$. Pe intervalul considerat, f este crescătoare și convexă deoarece:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} > 0 \quad \text{pentru } x \leq -1$$

și

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad \text{pentru } x \leq -1.$$

Considerăm atunci în procedeul (5.7.11)

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(-1)},$$

de unde obținem

$$g(x) = \frac{1}{6} \left(x + 5 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \right).$$

Este ușor de văzut că $f(-2) < 0$ și $g(-2) \in [-2, -1]$ și deci sunt verificate ipotezele Consecinței 5.7.1.

Pentru $x_0 = -2$ obținem rezultatele compuse în tabelul 2.

n	x_n	$g(x_n)$	$f(x_n)$
0	-2.000000000000000	-1.37420481033188	-7.85398163397448E-01
1	-1.406051288716128	-1.40401615840899	-7.50954227601746E-01
2	-1.404223647476550	-1.40422359726392	-2.44215636856504E-03
3	-1.404223602391970	-1.40422360239197	-6.02551550546058E-08
4	-1.404223602391970	-1.40422360239197	-3.71881345162528E-17

Tabelul 2

5.8 Convergența metodelor de tip Heron-Halley

În acest paragraf vom aborda ideea lui Halley pentru îmbunătățirea convergenței metodei lui Newton, idee ce constă în a considera în metoda lui Newton funcția h , $h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$ în locul funcției f . Mai precis este vorba de metoda (5.5.17) care are ordinul de convergență 3, aşa cum rezultă din Teorema 5.5.3.

În [48], autorii descriu riguros o metodă dată empiric de către Heron pentru aproximarea numărului $\sqrt[3]{100}$. Această metodă constă în următoarele:

Pentru aproximarea numărului $\sqrt[3]{N}$, $N \in \mathbb{R}$, $N > 0$, se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $a^3 < N < b^3$. Aproximația de tip Heron pentru $\sqrt[3]{N}$ este dată în [48] de relația

$$(5.8.1) \quad \Phi(N, a, b) = a + \frac{bd_1}{bd_1 + ad_2} (b - a),$$

unde $d_1 = N - a^3$ și $d_2 = b^3 - N$.

În [79] autorii observă că metoda de aproximare dată de (5.8.1) se obține aplicând o singură dată metoda coardei

$$(5.8.2) \quad x_2 = x_0 - \frac{h(x_0)}{[x_0, x_1; h]},$$

unde $x_0 = a$, $x_1 = b$ și $h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$, $f(x) = x^3 - N$, $x > 0$.

Constatăm că avem: $h(a) = -\frac{d_1}{a\sqrt{3}}$, $h(b) = \frac{d_2}{b\sqrt{3}}$, $[a, b; h] = \frac{d_1 b + d_2 a}{ab(b - a)\sqrt{3}}$ care, înlocuite în (5.8.2), ne conduc la $x_2 = \Phi(N, a, b)$, unde $\Phi(N, a, b)$ este dat de (5.8.1).

Este clar că ideia lui Halley, care constă în înlocuirea, într-o metodă de iterare, a ecuației $f(x) = 0$ cu ecuația $h(x) = 0$, unde

$$h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}},$$

a aparținut, cu multe sute de ani înainte, lui Heron.

Nu suntem în măsură să dovedim că Heron era conștient de proprietatea esențială pe care o are funcția h , și anume faptul că $h''(\bar{x}) = 0$ unde \bar{x} este rădăcina ecuației $f(x) = 0$. Așa cum se arată în [48], pentru $a = 4$ și $b = 5$, aproximarea $\Phi(100, 4, 5)$ dată de (5.8.1), adică de Heron, conține 2 zecimale exacte, ceea ce autorii lucrării [48] o consideră o aproximare foarte bună.

În cele ce urmează vom aduce precizări asupra metodei lui Heron pentru aproximarea rădăcinii cubice, vom da formule pentru marginile erorilor și vom generaliza această metodă pentru aproximarea numerelor de forma $\sqrt[p]{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{R}$, $N > 0$ și p - număr natural impar.

Fie deci ecuația $f(x) = x^3 - N = 0$, unde $N > 0$ și $0 < a^3 < N < b^3$. Considerăm funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de relația:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} = \frac{x^3 - N}{x\sqrt{3}}.$$

Din $h(x) = 0$ rezultă $g(x) = 0$ unde g este dată de relația

$$(5.8.3) \quad g(x) = x^2 - \frac{N}{x},$$

adică, în cele ce urmează putem renunța la factorul $\frac{1}{\sqrt{3}}$ și funcția g se va bucura de proprietatea, conform căreia $g''(\sqrt[3]{N}) = 0$.

Pentru aproximarea rădăcinii cubice a numărului N , considerăm numărul c dat de relația

$$(5.8.4) \quad c = a - \frac{g(a)}{[a, b; g]}.$$

Așa cum am constatat mai sus $c = \Phi(N, a, b)$. Este clar că $g(a) < 0$ și $[a, b; g] > 0$ și deci $c > a$. Este ușor de văzut că are loc identitatea

$$b - \frac{g(b)}{[a, b; g]} = a - \frac{g(a)}{[a, b; g]},$$

de unde, ținând cont de faptul că $g(b) > 0$, rezultă $c < b$.

Identitatea lui Newton

$$(5.8.4a) \quad g(x) = g(a) + [a, b; g](x - a) + [a, b, x; g](x - a)(x - b)$$

pentru $x = \sqrt[3]{N}$ ne conduce la relația

$$(5.8.5) \quad g(a) + [a, b; g] (\sqrt[3]{N} - a) + [a, b, \sqrt[3]{N}; g] (\sqrt[3]{N} - a) (\sqrt[3]{N} - b) = 0,$$

de unde, dacă ținem cont de (5.8.4), obținem

$$[a, b; g] (\sqrt[3]{N} - c) + [a, b, \sqrt[3]{N}; g] (\sqrt[3]{N} - a) (\sqrt[3]{N} - b).$$

Din această relație obținem

$$(5.8.6) \quad c - \sqrt[3]{N} = \frac{[a, b; \sqrt[3]{N}; g]}{[a, b; g]} \left(\sqrt[3]{N} - a \right) \left(\sqrt[3]{N} - b \right).$$

Dacă calculăm expresia

$$\frac{[a, b, \sqrt[3]{N}; g]}{[a, b; g]}$$

obținem

$$(5.8.7) \quad \begin{aligned} \frac{c - \sqrt[3]{N}}{\sqrt[3]{N}} &= \\ &= \frac{\sqrt[3]{N} - \sqrt{ab}}{\sqrt[3]{N}[ab(a+b) + N]} \left(\sqrt[3]{N} - a \right) \left(\sqrt[3]{N} - b \right) \left(\sqrt[3]{N} - \sqrt{ab} \right), \end{aligned}$$

care ne dă o reprezentare pentru eroarea relativă a aproximăției c .

Din (5.8.6), printr-un calcul elementar, obținem

$$(5.8.8) \quad \begin{aligned} \frac{m_2}{M_1} \left(\sqrt[3]{N} - a \right) \left(b - \sqrt[3]{N} \right) &\leq \\ &\leq |c - \sqrt[3]{N}| \leq \frac{M_2}{m_1} \left(\sqrt[3]{N} - a \right) \left(b - \sqrt[3]{N} \right), \end{aligned}$$

adică atât o margine inferioară pentru eroarea absolută cât și o margine superioară.

În (5.8.8) am notat

$$\begin{aligned} m_1 &= 3a, \quad m_2 = \min \left\{ \frac{N}{a^3} - 1, 1 - \frac{N}{b^3} \right\}, \\ M_1 &= \max \left\{ \frac{2a^3 + N}{a^2}, \frac{2b^3 + N}{b^2} \right\}, \\ M_2 &= \max \left\{ \frac{N}{a^3} - 1, 1 - \frac{N}{b^3} \right\}. \end{aligned}$$

Tinând cont de (5.8.8) și de notațiile de mai sus, se vede că dacă a și b sunt apropriate de $\sqrt[3]{N}$, atunci m_2 și M_2 sunt apropriate de zero, deci (5.8.8) ne arată că aproximarea Heron dată de (5.8.4) este cu atât mai bună cu cât a și b sunt mai apropriate de $\sqrt[3]{N}$.

Plecând de la observația de mai sus, se poate generaliza metoda lui Heron pentru aproximarea numărului $\sqrt[p]{N}$, unde $N \in \mathbb{R}$, $N > 0$ și $p \geq 3$, p număr natural impar.

Pentru fixarea ideilor, fie $p = 2q + 1$, unde $q \in \mathbb{N}$. Ne propunem să determinăm aproximarea pentru rădăcina reală pozitivă a ecuației

$$(5.8.9) \quad f(x) = x^{2q+1} - N = 0.$$

Pentru aceasta, fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a^{2q+1} < N < b^{2q+1}$ și funcția g dată de relația

$$(5.8.10) \quad g(x) = x^{q+1} - \frac{N}{x^q}$$

adică în afară de factorul constant $\frac{1}{\sqrt[2q+1]{2q+1}}$, ecuația $g(x) = 0$ este echivalentă cu ecuația $h(x) = 0$ unde

$$h(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f'(x)}}$$

cu f dată de (5.8.9).

Evident, au loc egalitățile $g(\sqrt[2q+1]{N}) = g''(\sqrt[2q+1]{N}) = 0$. Aplicând metoda coardei ecuației $g(x) = 0$, obținem pentru $\sqrt[2q+1]{N}$ aproximarea

$$(5.8.11) \quad c_1 = a - \frac{g(a)}{[a, b; g]},$$

de unde, folosind identitatea lui Newton (5.8.4a), vom obține

$$(5.8.12) \quad c_1 - \sqrt[2q+1]{N} = \frac{[a, b, \sqrt[2q+1]{N}; g]}{[a, b; g]} \left(\sqrt[2q+1]{N} - a \right) \left(b - \sqrt[2q+1]{N} \right),$$

de unde obținem evaluările

$$(5.8.13) \quad \begin{aligned} \frac{t_2}{2T_1} \left(\sqrt[2q+1]{N} - a \right) \left(b - \sqrt[2q+1]{N} \right) &\leq c_1 - \sqrt[2q+1]{N} \leq \\ &\leqq \frac{T_2}{2t_1} \left(\sqrt[2q+1]{N} - a \right) \left(b - \sqrt[2q+1]{N} \right), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} t_1 &= (2q + 1)a^q; \\ t_2 &= \min \left\{ \frac{q(q+1)(N - a^{2q+1})}{a^{q+2}}, \frac{q(q+1)(b^{2q+1} - N)}{b^{q+2}} \right\}; \\ T_1 &= \max \left\{ \frac{(q+1)a^{2q+1} + qN}{a^{q+1}}, \frac{(q+1)b^{2q+1} + qN}{b^{q+1}} \right\}; \\ T_2 &= \max \left\{ \frac{q(q+1)(N - a^{2q+1})}{a^{q+2}}, \frac{q(q+1)(b^{2q+1} - N)}{b^{q+2}} \right\}. \end{aligned}$$

REFERINȚE

Pentru redactarea acestui capitol am folosit lucrările: [1], [2], [3], [5], [6], [7], [12], [16], [23], [24], [30], [31], [32], [39], [42], [48], [50], [56], [68], [70], [71], [74], [79], [82], [88], [89], [90], [94], [95], [97], [98], [99], [100], [102], [103], [107], [108], [109], [111], [115], [116], [118], [119], [120], [128] și [145].

Capitolul 6

Algoritmi optimali de tip interpolator

Aşa cum am văzut în Capitolul 4, cele mai uzuale metode de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor neliniare (metoda lui Newton, metoda coardei, metoda lui Cebâşev şi diverse generalizări ale acestora) se obţin în mod unic folosind polinoamele de interpolare inversă de tip Lagrange-Hermite. De asemenea, dacă nodurile de interpolare sunt controlate într-un anumit mod, se obţin metode de tip Aitken-Steffensen şi diverse generalizări ale lor.

În capitolul de faţă ne propunem să expunem două aspecte privind problemele de optim, ce se pun asupra metodelor de tip interpolator.

Mai întâi vom studia problema optimalităţii ordinului de convergenţă şi apoi vom căuta să determinăm acele metode cu indice de eficienţă optim.

În ceea ce priveşte noţiunile de convergenţă şi indice de eficienţă, le vom adopta pe cele expuse în paragraful 5.1.

6.1 Ordin de convergenţă optimă

Aşa cum am văzut în paragraful 5.6, ordinul de convergenţă al metodei de iterare generată de (4.8.4) este dat de rădăcina pozitivă a ecuaţiei (5.6.39).

Dacă ţinem cont de Teorema 5.1.8, atunci ne punem problema unei distribuţii convenabile pentru ordinele de multiplicitate ale nodurilor în interpolarea inversă de tip Hermite, astfel încât ecuaţia corespunzătoare (de forma (5.6.39)) să admită rădăcina pozitivă cea mai mare şi deci să obţinem ordin de convergenţă optimă.

Fie a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , $n + 1$ numere naturale astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = m + 1$.

Notăm cu $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ o permutare a numerelor $(1, 2, \dots, n + 1)$,

pentru care avem

$$(6.1.1) \quad a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \cdots \leq a_{i_n} \leq a_{i_{n+1}}$$

Fie x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $n+1$ aproximății succesive ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$ și fie mulțimea ordonată

$$(6.1.2) \quad E = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}\}$$

Pentru claritate vom nota

$$(6.1.3) \quad \alpha_s = a_{i_s}, \quad s = \overline{1, n+1}$$

și

$$(6.1.4) \quad u_s = x_{i_s}, \quad s = \overline{1, n+1}.$$

Fie $H(y_1, \alpha_1; y_2, \alpha_2; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; f^{-1}|y)$ polinomul de interpolare inversă al lui Hermite cu nodurile y_1, y_2, \dots, y_{n+1} , $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$ și ordinele de multiplicitate respective $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$.

Dacă u_1, u_2, \dots, u_{n+1} sunt $n+1$ aproximății inițiale ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, atunci putem construi sirul $(u_p)_{p \geq 1}$ cu ajutorul următorului procedeu iterativ.

$$(6.1.5) \quad \begin{aligned} u_{n+2} &= H(y_1, \alpha_1; y_2, \alpha_2; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; f^{-1}|0) \\ u_{n+s+1} &= H(y_s, \alpha_1; y_{s+1}, \alpha_2; \dots, y_{s+n}, \alpha_{n+1}; f^{-1}|0), \quad s = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

Considerăm acum toate cele $(n+1)!$ permutări ale mulțimii $(1, 2, \dots, n+1)$. Fie $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ o permutare, acesteia îi corespunde următoarea metodă de iteratie

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} x_{n+2} &= H(y_{i_1}, a_{i_1}; y_{i_2}, a_{i_2}; \dots; y_{i_{n+1}}, a_{i_{n+1}}; f^{-1}|0) \\ x_{n+s+2} &= H(y_{i_1+s}, a_{i_1}; y_{i_2+s}, a_{i_2}; \dots; y_{i_{n+1}+s}, a_{i_{n+1}}; f^{-1}|0) \end{aligned}$$

În total avem $(n+1)!$ metode de forma (6.1.6).

Este deci normal să ne punem problema ca din cele $(n+1)!$ metode de forma (6.1.6) să selecționăm pe aceea pentru care ecuația de forma (5.6.39) are rădăcina pozitivă, ce ne oferă ordinul de convergență cel mai mare.

Tinând cont de Teorema 5.1.8, este ușor de arătat că are loc următoarea teoremă:

Teorema 6.1.1. *Dintre cele $(n+1)!$ metode de forma (6.1.6), cea care are ordinul de convergență cel mai mare este aceea determinată de permutarea $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ pentru care numerele $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$ sunt în ordine crescătoare, adică $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_{n+1}}$.*

Considerăm în continuare un caz particular, când numărul nodurilor de interpolare este 2, adică cazul de mai sus pentru $n = 1$. În acest caz cele două metode iterative au forma

$$(6.1.7) \quad x_3 = H(y_1, a_1; y_2, a_2; f^{-1}|0), \quad x_1, x_2 \in I, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2); \\ x_{n+1} = H(y_{n-1}, a_1; y_n, a_2; f^{-1}|0), \quad y_i = f(x_i), i \geq 3; n = 3, 4, \dots$$

sau

$$(6.1.8) \quad x_3 = H(y_1, a_2; y_2, a_1; f^{-1}|0), \quad x_1, x_2 \in I, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2); \\ x_{n+1} = H(y_{n-1}, a_2; y_n, a_1; f^{-1}|0), \quad y_i = f(x_i), i \geq 3; n = 3, 2, \dots$$

Ordinul de convergență al metodei (6.1.7) este dat de rădăcina pozitivă a ecuației

$$(6.1.9) \quad t^2 - a_2 t - a_1 = 0$$

și analog pentru (6.1.8) ordinul de convergență este dat de rădăcina pozitivă a ecuației

$$(6.1.10) \quad t^2 - a_1 t - a_2 = 0$$

Fie ω_1 rădăcina pozitivă a ecuației (6.1.9) și ω_2 rădăcina pozitivă a ecuației (6.1.10). Este ușor de văzut că dacă $a_2 \geq a_1$, atunci $\omega_2 \leq \omega_1$ și deci metoda (6.1.7) este cea optimă.

O altă clasă de metode, pentru care dorim să determinăm acea metodă pentru care ordinul de convergență este optimă, este aşa numita clasă de metode generalizate de tip Aitken-Steffensen.

O cale mai generală decât cea expusă în paragraful 4.6, de a extinde metodele de tip Aitken-Steffensen este următoarea.

Fie $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n+1}$, $n + 1$ funcții care verifică egalitățile

$$(6.1.11) \quad \varphi_i(\bar{x}) = \bar{x}, \quad i = \overline{1, n+1}$$

unde \bar{x} este rădăcina ecuației $f(x) = 0$

Presupunem că există numerele reale $\rho_i \geq 0$ și $p_i > 1$ $i = \overline{1, n+1}$, astfel încât sunt verificate relațiile:

$$(6.1.12) \quad |f(\varphi_i(x))| \leq \rho_i |f(x)|^{p_i}, \quad i = \overline{1, n+1},$$

pentru orice $x \in I$.

Fie $u_0 \in I$ o aproximatie initială a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$. Folosind funcțiile φ_i , $i = \overline{1, n+1}$, vom construi $n+1$ noduri de interpolare astfel

$$(6.1.13) \quad x_1^1 = \varphi_1(u_0), x_2^1 = \varphi_2(x_1^1), \dots, x_{n+1}^1 = \varphi_{n+1}(x_n^1).$$

Notăm cu $y_i^1 = f(x_i^1)$, $i = \overline{1, n+1}$ și considerăm numerele naturale $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, care verifică egalitatea

$$(6.1.14) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = m + 1.$$

Presupunem că f este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe I și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$. Considerând polinomul de interpolare inversă al lui Hermite cu nodurile y_i^1 , obținem astfel o nouă aproximare a lui \bar{x} dată de relația

$$(6.1.15) \quad u_1 = H(y_1^1, \alpha_1; y_2^1, \alpha_2; \dots; y_{n+1}^1, \alpha_{n+1}, f^{-1}|0),$$

cu evaluarea erorii

$$(6.1.16) \quad |\bar{x} - u_1| \leq \frac{M}{(m+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} |f(x_i^1)|^{\alpha_i},$$

unde

$$M = \sup \left\{ \left| [f^{-1}(y)]^{(m+1)} \right|, \quad y \in f(I) \right\}.$$

Folosind (6.1.12) și ținând cont de (6.1.13) obținem

$$\begin{aligned} |f(x_1^1)| &= |f(\varphi_1(u_0))| \leq \rho_1 |f(u_0)|^{p_1} \\ f(x_2^1) &= |f(\varphi_2(x_1^1))| \leq \rho_2 |f(x_1^1)|^{p_2} \leq \rho_2 \rho_1^{p_2} |f(u_0)|^{p_1 p_2} \end{aligned}$$

și în general avem:

$$(6.1.17) \quad |f(x_{i+1}^1)| \leq \rho_{i+1} \rho_i^{p_{i+1}} \rho_{i-1}^{p_i p_{i+1}} \dots \rho_1^{p_2 p_3 \dots p_{i+1}} |f(u_0)|^{p_1 p_2 \dots p_{i+1}},$$

$$i = 2, 3, \dots, n+1.$$

Notăm

$$(6.1.18) \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \prod_{j=1}^i p_j$$

și

$$(6.1.19) \quad \rho = \prod_{i=1}^{n+1} \rho_i^{\alpha_i + \beta_j^i}$$

unde

$$(6.1.20) \quad \beta_j^i = \sum_{j=i+1}^{n+1} \alpha_j \prod_{k=i+1}^j p_k.$$

Tinând cont de notațiile de mai sus, din (6.1.16) obținem

$$(6.1.21) \quad |\bar{x} - u_1| \leq \frac{M\rho}{(m+1)!} |f(u_0)|^\alpha.$$

Considerând acum aproximarea de rang $k-1$, u_{k-1} a lui \bar{x} și nodurile de interpolare x_i^k , $i = \overline{1, n+1}$ date de relațiile

$$(6.1.22) \quad x_1^k = \varphi_1(u_{k-1}), x_2^k = \varphi_2(x_1^k), \dots, x_{n+1}^k = \varphi_{n+1}(x_n^k)$$

și notând cu $y_i^k = f(x_i^k)$, $i = \overline{1, n+1}$, obținem aproximarea de rang k , u_k astfel:

$$(6.1.23) \quad u_k = H(y_1^k, \alpha_1; y_2^k, \alpha_2; \dots; y_{n+1}^k, \alpha_{n+1}; f^{-1}|)$$

pentru care, procedând ca mai sus, obținem:

$$(6.1.24) \quad |\bar{x} - u_k| \leq \frac{M\rho}{(m+1)!} |f(u_{k-1})|^\alpha, \quad k = 2, 3, \dots$$

Fie $\beta = \sup_{x \in I} |f'(x)|$, atunci din (6.1.24) obținem

$$(6.1.25) \quad |\bar{x} - u_k| \leq \frac{\beta^\alpha \rho M}{(m+1)!} |\bar{x} - u_{k-1}|^\alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se observă imediat din aceste relații că ordinul de convergență al sirului $(u_n)_{n \geq 0}$ dat de relațiile (6.1.23) este cel puțin α .

Punem și aici problema să ordonăm atât sirul de funcții φ_i , $i = \overline{1, n+1}$ cât și numerele α_i , $i = \overline{1, n+1}$, astfel încât α să fie maxim.

În acest scop, fie $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$ și $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ două permutări arbitrar ale numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$ și fie

$$h(y) = H(y_{k_1}^1, \alpha_{j_1}; y_{k_2}^1, \alpha_{j_2}; \dots; y_{k_{n+1}}^1, \alpha_{j_{n+1}}; f^{-1}|y)$$

polinomul lui Hermite pe nodurile $y_{k_i}^1$, $i = \overline{1, n+1}$, respectiv cu ordinele de multiplicitate α_{j_i} , $i = \overline{1, n+1}$.

Considerând toate permutările posibile atât pentru ordinele de multiplicitate α_i , $i = \overline{1, n+1}$ cât și pentru p_i , $i = \overline{1, n+1}$, obținem o clasă de

$(n+1)!$ metode de tip Aitken-Steffensen. Ne propunem să alegem din această clasă aceea pentru care numărul α dat de (6.1.18) este cel mai mare.

Cu notațiile de mai sus corespunzător permutărilor considerate, obținem următoarele procedee de iterare

$$(6.1.26) \quad u_s = H \left(y_{k-1}^s, \alpha_{j_1}; y_{k_2}^s \alpha_{j_2}; \dots; y_{k_{n+1}}^s, \alpha_{j_{n+1}}; f^{-1} | 0 \right),$$

pentru $s = 1, 2, \dots$, unde am notat

$$y_{k_i}^s = f(x_{x_i}^s), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

și

$$\begin{aligned} x_{k_1}^s &= \varphi_{k_1}(u_{s-1}) \\ x_{k_i}^s &= \varphi_{k_i}(x_{k_{i-1}}^s), \quad i = \overline{2, n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

u_0 fiind aproximarea inițială dată a lui \bar{x} .

Având în vedere cele de mai sus și aplicând Teorema 5.1.9, obținem:

Teorema 6.1.2. *Dintre toate cele $(n+1)!$ metode de iterare de forma (6.1.26), cea pentru care se obține ordinul de convergență α cel mai mare este acea metodă determinată de ordinea numerelor p_i și α_i $i = \overline{1, n+1}$ dată de (5.1.29).*

Mai precis, pentru a obține metoda cu ordinul de convergență α cel mai mare, procedăm astfel.

Relațiile (6.1.12) ne definesc perechile (p_i, φ_i) , $i = 1, n+1$. Ordonăm aceste perechi în ordine descrescătoare în raport cu p_i , renumerotăm și obținem perechile

$$(6.1.27) \quad (p_1, \varphi_1), (p_2, \varphi_2), \dots, (p_{n+1}, \varphi_{n+1}),$$

unde $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n+1}$.

De asemenea numerele α_i , $i = \overline{1, n+1}$ le așezăm în ordine crescătoare, adică

$$(6.1.28) \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n+1}.$$

Cu ajutorul funcțiilor φ_i , ordonate ca în (6.1.27), construim nodurile x_i^s , $i = \overline{1, n+1}$ de interpolare. Construim apoi polinomul lui Hermite de interpolare inversă pe nodurile $y_i^s = f(x_i^s)$ $i = \overline{1, n+1}$, cu ordinele de multiplicitate date de (6.1.28). Conform (5.1.9) vom obține pentru această metodă ordinul α cel mai mare.

6.2 Indice de eficiență optimal

Din cele expuse în Capitolul 5, este clar că efortul de calcul pentru a obține o aproximare convenabilă a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, cu ajutorul unei metode de iterare, depinde evident de ordinul de convergență al metodei. Dar tot așa de evident este și faptul că acest efort depinde și de volumul de calcule ce trebuie efectuate la fiecare pas de iterare. O măsură a efortului amintit poate fi dată de mărimea indicelui de eficiență dat de Definiția 5.1.5.

Această definiție poate fi criticată prin aceea că ia în considerare numai numărul de funcții ale căror valori trebuie calculate la fiecare pas de iterare și nu ține seamă de complexitatea fiecărei din aceste funcții.

Problemele de extrem pe care le vom studia în acest paragraf, par să nu fie influențate de deficiența specificată mai sus, deoarece clasele de metode pentru care vom studia indicii de eficiență fac apel la o singură funcție și eventual la derivatele acesteia de diferite ordine.

Pentru început vom considera una din cele mai simple clase de metode și anume metodele de tip Cebâșev, date de (4.5.2), adică considerăm sirul $(x_k)_{k \geq 0}$ dat de relațiile:

$$(6.2.1) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{[f^{-1}(y_k)]'}{1!} f(x_k) + \cdots + (-1)^n \frac{[f^{-1}(y_k)]^{(n)}}{n!} [f(x_k)]^n, \\ n = 0, 1, \dots$$

unde $x_0 \in I$ este aproximarea inițială a rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Presupunem că f este derivabilă până la ordinul $n + 1$ inclusiv pentru orice $x \in I$ și $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci și f^{-1} este derivabilă până la ordinul $n + 1$ inclusiv pe $f(I)$ și evident că au loc relațiile:

$$(6.2.2) \quad |\bar{x} - x_{k+1}| \leq \frac{M}{(n+1)!} |f(x_k)|^{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

unde $M = \left\{ \sup [f^{-1}(y)]^{(n+1)}, y \in f(I) \right\}$. Dacă notăm cu $\beta = \sup_{x \in I} |f'(x)|$, atunci din (6.2.2) obținem

$$(6.2.3) \quad |\bar{x} - x_{k+1}| \leq \frac{M\beta^{n+1}}{(n+1)!} |\bar{x} - x_k|^{n+1}$$

care ne arată că ordinul de convergență al metodelor date de (6.2.1) este $n + 1$.

Evident, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ din (6.2.1) obținem o metodă de iterare. Vrem să determinăm pe cea care are indicele de eficiență optimal.

Așa cum am văzut în paragraful 2.3, pentru calculul derivatelor funcției inverse are loc formula:

$$(6.2.4) \quad [f^{-1}(y)]^{(k)} = \sum \frac{(2k - i_1 - 2)!(-1)^{k+i_1-1}}{i_2! i_3! \dots i_k! [f'(x)]^{2k-1}} \cdot \\ \cdot \left(\frac{f'(x)}{1!} \right)^{i_1} \left(\frac{f''(x)}{2!} \right)^{i_2} \dots \left(\frac{f^k(x)}{k!} \right)^{i_k}$$

unde suma se extinde la toate soluțiile întregi și nenegative ale sistemului

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 + \dots + (k-1)i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k = k-1 \end{cases}$$

Din acest motiv, pentru a trece de la pasul k de iterare la pasul $k+1$ cu (6.2.1), trebuie să calculăm valorile

$$f(x_k), f'(x_k), \dots, f^{(n)}(x_k)$$

și apoi cu formula (6.2.4) trebuie calculate valorile

$$[f^{-1}(y_k)]', [f^{-1}(y_k)]'', \dots, [f^{-1}(y_k)]^{(n)}$$

unde $y_k = f(x_k)$. În sfârșit, putem să considerăm o valoare de funcție și pentru expresia din partea dreaptă a formulei (6.2.1).

În total, pentru a trece de la pasul k de iterare la pasul $k+1$, este necesar să calculăm $2(n+1)$ valori de funcții.

Ținând cont de Observația 5.1.3, indicele de eficiență al metodei (6.2.1) este dat de relația

$$(6.2.5) \quad E(n) = (n+1)^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Considerăm funcția $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = t^{\frac{1}{2t}}$, pentru care observăm că ia valoarea maximă dacă $t = e$ și deci pentru $n = 2$ funcția $E(n)$ ia valoarea maximă, adică

$$E(2) = \sqrt[6]{3}.$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă

Teorema 6.2.1. *Dintre toate metodele de iterare de tip Cebășev de forma (6.2.1), cea care are indicele de eficiență cel mai mare este metoda cu ordinul de convergență 3, dată de (4.5.10), adică*

$$(6.2.6) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k) [f(x_k)]^2}{[f'(x_k)]^3}, \quad x_0 \in I, k = 0, 1, \dots$$

Considerăm în continuare metoda iterativă dată de polinomul de interpolare al lui Lagrange de forma (4.4.4).

În acest caz, pentru a trece de la pasul de iterare k la pasul $k + 1$, este necesar să calculăm o singură valoare a funcției f și apoi valoarea polinomului de interpolare inversă din dreapta egalității (4.4.4). Deci în total 2 valori de funcții. Dacă notăm cu γ_{n+1} rădăcina pozitivă a ecuației (5.6.6),

din paragraful 5.1 rezultă $\frac{2(n+1)}{n+2} \leq \gamma_{n+1} < 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Tinând cont de definiția indicelui de eficiență, pentru metoda de iterare interpolatoare de tip Lagrange se obține

$$(6.2.7) \quad E(n) = [\gamma_{n+1}]^{\frac{1}{2}}$$

și acest indice crește odată cu creșterea numărului de noduri de interpolare.

Vom cconsidera în cele ce urmează metoda de iterare de tip hermite dată de (4.8.2), în cazul particular când ordinele de multiplicitate ale nodurilor de interpolare sunt egale între ele, adică:

$$(6.2.8) \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = q, \quad q \geq 2.$$

În acest caz metoda de iterare (4.8.2) devine

$$(6.2.9) \quad x_{n+k+1} = H(y_k, q; y_{k+1}, q; \dots; y_{k+n}, q; f^{-1}, 0)$$

$k = 1, 2, \dots$, unde $y_{k+i} = f(x_{k+i})$, $i = \overline{0, n}$, $n \geq 1$.

Pentru a trece de la pasul k de iterare la pasul $k + 1$ cu (6.2.9) trebuie să calculăm valorile

$$f(x_{n+k+1}), f'(x_{n+k+1}), \dots, f^{(q-1)}(x_{n+k+1}),$$

adică q valori de funcții. Cu formula (6.2.4) vom calcula apoi valorile derivatelor funcției inverse, adică valorile $[f^{-1}(y_{n+k+1})]^{(i)}$, $i = \overline{1, k-1}$, unde $y_{n+k+1} = f(x_{n+k+1})$. Dacă mai luăm în considerare și valoarea funcției H dată de partea dreaptă din (6.2.9), obținem în total $2q$ valori de funcții.

Ordinul de convergență al metodei (6.2.9) este dat de rădăcina pozitivă $\delta_{n+1}(q)$ a ecuației (5.1.12). Din relația:

$$\max \left\{ q, \frac{n+1}{n+2} (q+1) \right\} \leq \delta_{n+1}(q) \leq q+1,$$

rezultă pentru indicele de eficiență al metodei (6.2.9) $E(\delta_{n+1}(q), q)$ relația

$$(6.2.10) \quad \left(\max \left(q, \frac{n+1}{n+2} (q+1) \right) \right)^{\frac{1}{2q}} \leq E(\delta_{n+1}(q), q) \leq (q+1)^{\frac{1}{2q}}$$

pentru $q \geq 2$ și $n \geq 1$.

De asemenea din relația

$$\delta_n(q) < \delta_{n+1}(q)$$

rezultă

$$(6.2.11) \quad E(\delta_{n+1}(q), q) > E(\delta_n(q), q),$$

adică funcția E ce caracterizează indicele de eficiență este crescătoare în raport cu n , adică în raport cu numărul de noduri de interpolare.

Din relația $q \geq n + 1$ rezultă egalitatea

$$(6.2.12) \quad \max \left\{ q, \frac{n+1}{n+2} (q+1) \right\} = q,$$

iar dacă $q < n + 1$, atunci

$$(6.2.13) \quad \max \left\{ q, \frac{n+1}{n+2} (q+1) \right\} = \frac{n+1}{n+2} (q+1).$$

Folosind (6.2.12), respectiv (6.2.13), obținem relațiile

$$(6.2.14) \quad q^{\frac{1}{2q}} < E(\delta_{n+1}(q), q) < (q+1)^{\frac{1}{2q}}$$

dacă $q \geq n + 1$ și

$$(6.2.15) \quad \left[\frac{n+1}{n+2} (q+1) \right]^{\frac{1}{2q}} < E(\delta_{n+1}(q), q) < (q+1)^{\frac{1}{2q}},$$

adică $q < n + 1$.

În cele ce urmează vom analiza pe rând cele două cazuri.

Pentru $q \geq n + 1$ considerăm funcțiile $h, l : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile $h(t) = t^{\frac{1}{2t}}$ și $l(t) = (t+1)^{\frac{1}{2t}}$. Se verifică ușor că au loc relațiile: $\lim_{t \searrow 0} h(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$, h este crescătoare pe $(0, e)$ și descrescătoare pe $(e, +\infty)$.

Analog pentru l avem: $\lim_{t \searrow 0} l(t) = e^{\frac{1}{2}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = 1$ și l este descrescătoare în $(0, \infty)$.

Valoarea maximă a funcției h este atinsă pentru $t = e$, adică $h(e) = e^{\frac{1}{2e}}$.

Din relația (6.2.14) este clar că valoarea maximă a funcției E este mai mare decât $e^{\frac{1}{2e}}$ care este, aşa cum am văzut, valoarea maximă a lui h .

Considerăm ecuația

$$(6.2.16) \quad \varphi(t) = (1+t)^{\frac{1}{2t}} - e^{\frac{1}{2e}} = 0$$

pentru care avem $\varphi(0) = e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2e}} > 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1 - e^{\frac{1}{2e}} < 0$.

În continuare vom arăta că $\varphi'(t) < 0$ pentru $t > 0$ și deci ecuația (6.2.16) are o singură rădăcină $\bar{t} > 0$. Într-adevăr din (6.2.16) deducem

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} (t+1)^{\frac{1}{2t}} \left[\frac{\frac{t}{t+1} - \ln(1+t)}{t^2} \right] = \frac{(t+1)^{\frac{1}{2t}}}{2t^2} \psi(t)$$

unde $\psi(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$.

Observăm că $\psi(0) = 0$ și $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = -\infty$. Mai mult, pentru $t > 0$,

$\psi'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} < 0$ și $\psi(t) < 0$ pentru orice $t > 0$, rezultă că $\varphi'(t) < 0$ pentru $t > 0$ și deci φ este strict descrescătoare, adică rădăcina \bar{t} este unică. Este clar că pentru $t \leq \bar{t}$, $(1+t)^{\frac{1}{2t}} \geq e^{\frac{1}{2e}}$, adică maximul funcției E se găsește printre valorile lui E pentru $t \leq \bar{t}$. Este ușor de văzut că $E > 4$. Este atunci clar că pentru a determina cea mai mare valoare a lui $E(\delta_{n+1}(q), q)$ este suficient să luăm cea mai mare din valorile calculate pentru $q = 2$, $q = 3$ și $q = 4$ și $n \leq q - 1$. Se constată ușor că E ia valoarea maximă pentru $q = 2$ și $n = 1$.

Am demonstrat astfel următoarea teoremă

Teorema 6.2.2. *Dintre toate metodele de forma (6.2.9) pentru $n \geq 1$ și $q \geq n+1$, metoda cu cel mai mare indice de eficiență este aceia ce corespunde cazului $n = 1$ și $q = 2$, adică metoda dată de relațiile*

$$(6.2.17) \quad x_{k+2} = H(y_k, 2; y_{k+1}, 2; f^{-1}(0)), \quad k = 1, 2, \dots$$

În continuare vom analiza cazul $q < n + 1$. În acest caz indicele de eficiență verifică (6.2.15). Considerăm acum, pe lângă funcția l definită la cazul precedent, funcția $p_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de relația

$$p_n(t) = \left[\frac{n+1}{n+2} (t+1) \right]^{\frac{1}{2t}}$$

pentru care se arată ușor că $\lim_{t \searrow 0} p_n(t) = 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = 1$, unde n este fixat. Derivata funcției p_n are forma:

$$(6.2.18) \quad \begin{aligned} p'_n(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{n+2} (t+1) \right]^{\frac{1}{2t}} \frac{\frac{t}{t+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} (t+1)}{t^2} = \\ &= \frac{1}{2t^2} \left[\frac{n+1}{n+2} (t+1) \right]^{\frac{1}{2t}} h_n(t) \end{aligned}$$

unde

$$(6.2.19) \quad h_n(t) = \frac{t}{t+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} (t+1).$$

Observăm că $h_n(0) = -\ln \frac{n+1}{n+2} > 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t) = -\infty$. În plus, $h'_n(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} < 0$ pentru $t > 0$ și deci ecuația $h_n(t) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă τ_n , adică $p'_n(t) = 0$ are singura rădăcină τ_n . Este clar că funcția p_n își atinge valoarea maximă pentru $t = \tau_n$.

Din (6.2.19) rezultă egalitatea $\frac{n+1}{n+2}(1+\tau_n) = e^{\frac{\tau_n}{1+\tau_n}}$ și de aici obținem pentru valoare maximă a funcției p_n expresia

$$p_n(\tau_n) = e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}}.$$

Considerăm acum funcția $p_{n+1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de relația

$$p_{n+1}(t) = \left[\frac{n+2}{n+3} (t+1) \right]^{\frac{1}{2t}}$$

pentru care derivata $p'_{n+1}(t)$ are forma

$$p'_{n+1}(t) = \frac{1}{2t^2} \left[\frac{n+2}{n+3} (1+t) \right]^{\frac{1}{2t}} h_{n+1}(t),$$

unde

$$h_{n+1}(t) = \frac{t}{t+1} - \ln \frac{n+2}{n+3} (t+1).$$

Deoarece $h_n(\tau_n) = 0$, rezultă imediat relația

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\tau_n) &= \ln \frac{n+1}{n+2} (\tau_n + 1) - \ln \frac{n+2}{n+3} (\tau_n + 1) = \\ &= \ln \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} < 0, \end{aligned}$$

adică $p'_{n+1}(\tau_n) < 0$.

Fie τ_{n+1} rădăcina ecuației $p'_{n+1}(t) = 0$. Este clar că relația $p'_{n+1}(\tau_n) < 0$ implică $\tau_{n+1} < \tau_n$ pentru $n \geq 2$, $1 < q < n+1$.

Considerăm acum ecuația

$$q_n(t) = (1+t)^{\frac{1}{2t}} - e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}} = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Deoarece

$$q'_n(t) = \frac{1}{2t^2} (t+1)^{\frac{1}{2t}} \left[\frac{t}{t+1} - \ln(1+t) \right],$$

rezultă imediat că pentru $t \in (0, +\infty)$, $q'_n(t) < 0$ și deci $q_n(t)$ este funcție descrescătoare. Cum $\lim_{t \searrow 0} q_n(t) = e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}} > 0$ și $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{\frac{1}{2t}} - e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}} = 1 - e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}} < 0$, rezultă că ecuația $q_n(t) = 0$ are o singură rădăcină $\mu_n \in (0, +\infty)$.

Fie acum ecuația

$$q_{n+1}(t) = (1+t)^{\frac{1}{2t}} - e^{\frac{1}{2(1+\tau_{n+1})}} = 0, \quad t \in (0, +\infty)$$

și μ_{n+1} rădăcina ei din intervalul $(0, +\infty)$.

Dacă ținem cont de faptul că $\tau_n > \tau_{n+1}$, constatăm imediat că are loc inegalitatea

$$p_{n+1}(\mu_n) = e^{\frac{1}{2(1+\tau_n)}} - e^{\frac{1}{2(1+\tau_{n+1})}} < 0,$$

ceea ce ne arată că $\mu_{n+1} < \mu_n$.

Deoarece pentru $t > \tau_n$, avem $p_n(t) < p_n(\tau_n)$, este clar că valorile n și q pentru care funcția E este maximă se găsesc în mulțimea

$$\{q \in \mathbb{N} \mid 2 \leq q < \min\{n+1, \mu_n\}\}.$$

Cum pentru $n = 2$, $\mu_n < 4$ și pentru $n = 3$ $\mu_n < 3$, rezultă că singura valoare pentru care E ia valoarea maximă este $q = 2$ și este ușor de văzut că au loc relațiile

$$E(\delta_n(2), 2) < E(\delta_{n+1}(2), 2),$$

pentru orice $n \geq 2$ și deci E este crescătoare în raport cu variabila n .

Am demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 6.2.3. *Dacă $q < n+1$ în metoda (6.2.9), atunci pentru orice n fixat, valoarea lui q pentru care $E(\delta_{n+1}(q), q)$ este maximă, este egală cu 2.*

6.3 Metodă optimală de tip Hermite cu 2 pași

Notăm cu $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ un număr natural și considerăm în cele ce urmează polinomul lui Hermite de interpolare inversă cu două noduri de interpolare, având fiecare același ordin de multiplicitate q .

Asupra funcției f vom face următoarele ipoteze:

- α) funcția f este derivabilă pe intervalul $]a, b[$ până la ordinul $2q$ inclusiv;
- β) $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in]a, b[$;

$\gamma)$ ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină $\bar{x} \in]a, b[$.

În ipotezele $\alpha)$ - $\gamma)$ de mai sus este clar că funcția f admite o inversă $f^{-1} : D \rightarrow I$, unde $D = f(I)$ și rădăcina \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$ este dată de relația

$$(6.3.1) \quad \bar{x} = f^{-1}(0).$$

Notăm cu $H(y_1, q, y_2, q; f^{-1}|y)$ polinomul de interpolare inversă al lui Hermite care verifică egalitățile:

$$(6.3.2) \quad H^{(k)}(y_1, q; y_2q; f^{-1}|y_i) = [f^{-1}(y_i)]^{(k)}, \quad i = 1, 2; k = 0, 1, \dots, q-1$$

unde $[f^{-1}(y_i)]^0 = f^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2$ și $y_1, y_2 \in D$.

Dacă considerăm polinomul

$$\omega_1(y) = (y - y_1)^q(y - y_2)^q$$

atunci restul în formula de interpolare a lui Hermite are forma:

$$\begin{aligned} R(f^{-1}; y) &= f^{-1}(y) - H(y_1, q; Y_2, q : f^{-1}|y) = \\ &= \frac{1}{(2q)!} [f^{-1}(\theta_1)]^{(2q)} \omega_1(y) \end{aligned}$$

unde θ_1 este cuprins în cel mai mic interval deschis ce conține punctele y, y_1 și y_2 .

Fie $x_s, x_{s+1} \in I$ două aproximări ale rădăcinii \bar{x} a ecuației $f(x) = 0$, atunci următoarea aproximare a rădăcinii \bar{x} se poate obține astfel:

$$(6.3.3) \quad x_{s+2} = H(y_s, q; y_{s+1}, q; f^{-1}|0), \quad s = 0, 1, \dots.$$

Vom presupune că toate elementele sirului $(x_p)_{p \geq 0}$ generat de relațiile (6.3.3) aparțin intervalului $]a, b[$. Înținând cont de cele de mai sus este ușor de văzut că au loc relațiile

$$(6.3.4) \quad |f(x_{s+2})| = |f'(\alpha_s)| \frac{|[f^{-1}(\theta_2)]^{(2q)}|}{(2q)!} |f(x_{s+1})|^q |f(x_s)|^q, \quad s = 0, 1, \dots,$$

unde α_s este conținut în intervalul deschis determinat de punctele \bar{x} și x_{s+2} , iar θ_s este conținut în cel mai mic interval deschis ce conține punctele $0, y_s, y_{s+1}, s = 0, 1, \dots$.

Din (6.3.4) este ușor de văzut că ordinul de convergență al metodei considerate este dat de rădăcina pozitivă a ecuației

$$t^2 - qt - q = 0.$$

Din această ecuație se obține ordinul de convergență ω dat de egalitatea

$$\omega = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2}.$$

Din clasa de metode considerate mai sus dorim să determinăm pe aceia care are indicele de eficiență cel mai mare. Pentru aceasta vom observa că, pentru a genera elementele sirului $(x_p)_{p \geq 0}$ dat de (6.3.3), este necesar ca la pasul de iterare p , $p \geq 2$ să calculăm valorile funcțiilor

$$f, f', \dots, f^{(q-1)}$$

pe punctul x_p , obținut la pasul $p - 1$, deoarece valorile acestor funcții pe punctul x_{p-1} au fost calculate la pasul anterior. Deci sunt necesare q valori de funcții.

Dacă ținem cont că polinomul de interpolare inversă de tip Hermite se exprimă cu ajutorul derivatelor succesive ale funcției f^{-1} , care conform cu relațiile (2.3.1) au o formă relativ complicată, atunci conform acestor relații va fi necesar să luăm în considerare încă calculul a $q - 1$ valori de funcții. Pe de altă parte, calculul valorii polinomului lui Hermite poate implica încă o valoare de funcție. În concluzie, putem considera că pentru a trece de la un pas de iterare la următorul, este necesar să calculăm în total $2q$ valori de funcții. Toate acestea pot influența valoarea indicelui de eficiență, însă, aşa cum vom constata în cele ce urmează, valoarea lui q pentru care indicele de eficiență este optimal nu este influențată, chiar dacă presupunem că numărul de valori de funcții ce trebuie calculate la fiecare pas de iterare este proporțional cu q . Dacă presupunem că numărul de valori de funcții este egal cu δq , unde δ este o constantă pozitivă, atunci conform Observației 5.1.3, indicele de eficiență al metodei (6.3.3) este dat de

$$(6.3.5) \quad E = \varphi(q) = \left[\frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2} \right]^{\frac{1}{\delta q}}.$$

Valoarea lui q pentru care E este maxim este dată de rădăcina ecuației $\varphi'(q) = 0$ și, aşa cum vom arăta mai jos, această rădăcină nu depinde de δ .

Din (6.3.5) obținem:

$$\varphi'(q) = \frac{1}{\delta} \varphi(q) \left[\frac{1}{q} \ln \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2} \right]'.$$

Deoarece $\varphi(q) > 0$, rezultă că ecuația $\varphi'(q) = 0$ este echivalentă cu ecuația:

$$\psi(q) = \left(\frac{1}{q} \ln \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2} \right)' = 0,$$

de unde se obține

$$(6.3.6) \quad \psi(q) = \frac{\sqrt{q^2 + 4q} + q + 2}{\sqrt{q^2 + 4q} + q + 4} - \ln \frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2} = 0.$$

Pentru a rezolva această ecuație notăm $t = q + \sqrt{q^2 + 4q}$ și observăm că $\frac{dt}{dq} > 0$ pentru $q > 0$. Cu substituția de mai sus ecuația (6.3.6) devine

$$\eta(t) = \frac{t+2}{t+4} - \ln \frac{t}{2} = 0$$

și deoarece $\eta'(t) < 0$, pentru $t > 0$ rezultă că ecuația $\eta(t) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă \bar{t} . Mai observăm că $\eta(2) = \frac{2}{3} > 0$ și $\eta(2e) = \frac{e+1}{e+2} - 1 < 0$, adică $2 < E < 2e$, care ne conduce la concluzia că rădăcina \bar{q} a ecuației $\varphi'(q) = 0$ verifică relațiile

$$2 < \bar{q} + \sqrt{\bar{q}^2 + 4\bar{q}} < 2e,$$

de unde rezultă

$$(6.3.7) \quad \frac{1}{2} < \bar{q} < \frac{e^2}{e+1}.$$

Mai observăm că $\eta(t) > 0$ dacă $1 \leq t < \bar{t}$ și $\eta(t) < 0$ dacă $\bar{t} < t$, de unde rezultă $\varphi'(q) > 0$ dacă $\frac{1}{2} < q < \bar{q}$ și $\varphi'(q) < 0$ dacă $q > \bar{q}$. Funcția $\varphi(q)$ are în punctul $q = \bar{q}$ un punct de maxim. Rămâne să căutăm valoarea maximă a lui E , pe mulțimea numerelor naturale, printre acele numere naturale cuprinse în vecinătatea numărului real \bar{q} . Din relațiile (6.3.7) rezultă că valoarea lui q pentru care E este maxim trebuie căutată în mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Se constată ușor că $\varphi(1) < \varphi(2)$ și $\varphi(2) > \varphi(3)$, ceea ce ne conduce la concluzia că E este maxim când $q = 2$.

Am demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 6.3.1. *Dintre toate metodele de iterare de forma (6.3.3), metoda care are indicele de eficiență cel mai mare este aceea pentru care $q = 2$, adică metoda dată de relațiile*

$$(6.3.8) \quad x_{s+2} = H(y_s; 2, y_{s+1}; 2; f^{-1}|0), \quad x_0, x_1 \in I, \quad s = 0, 1, \dots.$$

În încheiere vom da pentru H o expresie folosind diferențele divizate pe noduri duble.

$$(6.3.9) \quad h(y_s; 2, y_{s+1}; 2; f^{-1} | 0) = x_s - [y_s, y_s; f^{-1}] y_s + \\ + [y_s, y_s, y_{s+1}; f^{-1}] y_s^2 - [y_s, y_s, y_{s+1}, y_{s+1}; f^{-1}] y_s^2 y_{s+1},$$

unde $y_s = f(x_s)$, $y_{s+1} = f(x_{s+1})$.

Pentru calculul diferențelor divizate din (6.3.9) se poate folosi formula de recurență a diferențelor divizate și se întocmește următorul tabel:

y_s	$f^{-1}(y_s)$			
y_s	$f^{-1}(y_s)$	$[y_s, y_s; f^{-1}]$		
y_{s+1}	$f^{-1}(y_{s+1})$	$[y_s, y_{s+1}; f^{-1}]$	$[y_s, y_s, y_{s+1}; f^{-1}]$	
y_{s+1}	$f^{-1}(y_{s+1})$	$[y_{s+1}, y_{s+1}; f^{-1}]$	$[y_s, y_{s+1}, y_{s+1}; f^{-1}]$	$[y_s, y_s, y_{s+1}, y_{s+1}; f^{-1}]$

unde $y_s = f(x_s)$, $y_{s+1} = f(x_{s+1})$, $[y_s, y_s; f^{-1}] = \frac{1}{f'(x_s)}$, $[y_s, y_{s+1}; f^{-1}] = \frac{1}{[x_s, x_{s+1}; f]}$ și $[y_{s+1}, y_{s+1}; f^{-1}] = \frac{1}{f'(x_{s+1})}$.

După cum se observă în (6.3.9) intervin numai elementele de pe diagonala acestui tabel.

REFERINȚE

În redactarea materialului conținut în acest capitol am folosit lucrările: [29], [32], [57], [58], [92], [93], [96], [105], [106], [110], [112], [114] și [145].

Capitolul 7

Aproximarea rădăcinilor ecuațiilor algebrice

În cadrul capitolului de față ne vom ocupa în exclusivitate de ecuațiile de forma

$$(7.0.1) \quad f(x) = 0$$

unde f este un polinom de gradul n , n fiind un număr natural.

O ecuație de forma (7.0.1) are, după cum se știe, n rădăcini care pot fi numere reale sau complexe.

Pentru a găsi aceste rădăcini, trebuie în primul rând să delimităm domeniul din planul complex unde se găsesc ele.

În multe probleme practice ne interesează numai anumite rădăcini ale ecuației (7.0.1) și de aceea este necesar ca, după delimitarea domeniului care conține toate rădăcinile ecuației (7.0.1), să procedăm la separarea lor.

7.1 Marginile rădăcinilor ecuațiilor algebrice

Considerăm ecuația

$$(7.1.1) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

unde a_0, a_1, \dots, a_n sunt numere reale, $a_0 \neq 0$.

Notăm cu:

$$(7.1.2) \quad \begin{aligned} a &= \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}, \\ a' &= \max \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

Teorema 7.1.1. *Toate rădăcinile ecuației (7.1.1) sunt în coroana circulară din planul complex, delimitată de inegalitățile:*

$$\frac{|a_n|}{a' + |a_n|} \leq |z| \leq 1 + \frac{a}{|a_0|}, \quad a_0 \neq 0$$

Demonstratie. Observăm că $f(z)$ verifică inegalitatea

$$|f(z)| \geq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n|.$$

Dacă ținem cont de (7.1.2), pentru $|z| > 1$ avem:

$$\begin{aligned} |a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n| &\leq \\ &\leq a \{ |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1 \} = a \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < \frac{a |z|^n}{|z| - 1}. \end{aligned}$$

Rezultă că $|f(z)| > 0$ dacă are loc relația

$$|a_0| |z|^n - a \frac{|z|^n}{|z| - 1} \geq 0$$

de unde obținem

$$|z| \geq 1 + \frac{a}{|a_0|},$$

ceea ce înseamnă că toate rădăcinile ecuației (7.1.1) sunt în discul de rază

$$R = 1 + \frac{a}{|a_0|}.$$

Dacă considerăm acum ecuația

$$(7.1.3) \quad g(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0,$$

care se obține din (7.1.1) prin substituția $z = \frac{1}{y}$, rezultă cătoate rădăcinile ei sunt cuprinse în discul de rază $R' = 1 + \frac{a'}{|a_n|}$, adică

$$\frac{1}{|y|} \leq 1 + \frac{a'}{|a_n|}$$

de unde avem

$$y \geq \frac{|a_n|}{a' + |a_n|},$$

ceea ce ne dovedește inegalitățile din Teorema 7.1.1.

Fie $r = \frac{|a_n|}{a' + |a_n|}$ și $R = 1 + \frac{a}{|a_0|}$. Evident $R \geq r$ deoarece $a \geq |a_n|$ și $a' \geq |a_0|$. Dacă notăm $z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ rădăcinile ecuației (7.1.1), atunci domeniul unde se găsesc rădăcinile z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ este delimitat în figura 7.1.1.

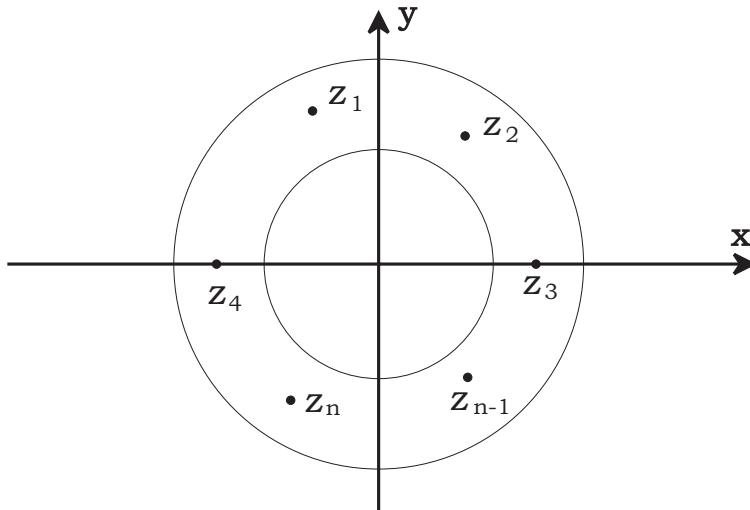


Figura 7.1.1

Observația 7.1.1. Numerele R și r sunt respectiv marginile superioară și inferioară ale rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.1), iar numerele $-R$ și $-r$ sunt respectiv marginile inferioară și superioară ale rădăcinilor negative ale aceleiași ecuații.

Presupunem acum că $a_0 > 0$. ne vom ocupa în continuare de marginile rădăcinilor reale ale ecuației (7.1.1). Evident, este suficient să căutăm marginile rădăcinor pozitive ale ecuației (7.1.1), deoarece dacă schimbăm apoi în ecuația (7.1.1) pe x cu $-x$ și căutăm pentru noua ecuație marginile rădăcinilor pozitive din acestea, vom obține ușor apoi marginile rădăcinilor negative ale ecuației considerate.

Observația 7.1.2. Dacă considerăm ecuația (7.1.1) și odată cu aceasta ecuațiile:

$$f_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0;$$

$$f_2(x) = f(-x) = 0;$$

$$f_3(x) = x^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

și presupunem că limitele superioare ale rădăcinilor pozitive ale lor sunt, respectiv R_1 , R_2 și R_3 , atunci $\frac{1}{R_1}$ este limita inferioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.1), $-R_2$ este limita inferioară a rădăcinilor negative ale ecuației (7.1.1) iar $-\frac{1}{R_3}$ este limita superioară a rădăcinilor negative ale ecuației (7.1.1).

Teorema 7.1.2. Dacă notăm cu a valoarea absolută a celui mai mare, în valoare absolută, dintre coeficienții negativi ai ecuației (7.1.1) și fie a_m , $0 < m \leq n$, primul coeficient negativ din sirul a_0, a_1, \dots, a_n , atunci toate rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.1) sunt mai mici decât $1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Demonstratie. Înlocuim coeficienții pozitivi a_1, \dots, a_{m-1} cu zero, iar toți ceilalți coeficienți îi înlocuim cu $-a$, atunci valoarea polinomului f dat de (7.1.1) pentru $x > 1$ nu poate decât să descrească.

Avem:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq a_0 x^n - a(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \dots + x + 1) = \\ &= a_0 x^n - a \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} > a_0 x^n - a \frac{x^{m-n-1}}{x - 1} = \\ &= \frac{x^{n-m+1}}{x - 1} [a_0 x^{m-1}(x - 1) - a] \geq 0 \end{aligned}$$

dacă $x \geq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$.

Într-adevăr, dacă $x \geq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$, atunci avem:

$$a_0 x^{m-1}(x - 1) - a \geq a_0 \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}} \left(1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}\right)^{m-1} - a > 0,$$

de unde rezultă că toate rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.1) sunt mai mici decât $1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$.

Observația 7.1.3. Dacă ecuația (7.1.1) nu are nici un coeficient negativ, atunci această ecuație nu are nici o rădăcină pozitivă.

Exemplu numeric. Să se găsească marginile rădăcinilor reale ale ecuației:

$$(7.1.4) \quad x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000 = 0.$$

Vom căuta mai întâi marginile pozitive ale rădăcinilor acestei ecuații și anume cu notațiile din teorema 7.1.2 avem: $a = 1350$, $m = 1$ și $a_0 = 1$. Deci toate rădăcinile pozitive sunt mai mici decât $1 + \frac{1350}{1} = 1351$.

Pentru a găsi marginea inferioară a rădăcinilor pozitive vom considera ecuația

$$(7.1.5) \quad 1 - 35y + 380y^2 - 1350y^3 + 1000y^4 = 0$$

pe care am obținut-o din cea inițială prin schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$.

Pentru ultima ecuație avem $a = 1350$, $a_0 = 1000$, $m = 1$, atunci marginea superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.5) este $1 + \frac{1350}{1000} = 2,35$,

de unde rezultă $|y_i| < 2,35$ sau $\frac{1}{y_i} > \frac{1}{2,35}$. Din cele de mai sus deducem că rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.4) sunt cuprinse în intervalul $\left[\frac{100}{235}, 1351\right]$.

Pentru a găsi marginile rădăcinilor negative considerăm ecuația

$$(7.1.6) \quad z^4 + 35z^3 + 380z^2 + 1350z + 1000 = 0$$

obținută din (7.1.4) prin schimbarea lui x cu $-z$. Se vede că ecuația (7.1.6) are numai coeficienți pozitivi și deci nu are nici o rădăcină pozitivă, ceea ce ne conduce la faptul că ecuația (7.1.4) nu are rădăcini negative.

Indicăm în continuare o altă metodă de determinare a marginii superioare a rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.1).

Considerăm ecuația (7.1.1) și presupunem că $a_0 > 0$. Punem polinomul f sub forma:

$$f(x) = Q_1(x) - Q_2(x) + Q_3(x) - Q_4(x) + \cdots + Q_{2m-1}(x) - Q_{2m}(x),$$

unde $Q_1(x)$ este suma termenilor consecutivi din polinomul f care au coeficienți pozitivi începând cu a_0x^n , $-Q_2(x)$ este suma termenilor consecutivi din polinomul f având coeficienții negativi și care urează imediat după termenii lui $Q_1(x)$, apoi $Q_3(x)$ este suma termenilor cu coeficienți pozitivi din f care urmează după termenii lui Q_2 și aşa mai departe, ultimul polinom $Q_{2m}(x)$ fiind compus din termeni cu coeficienți negativi sau este identic egal cu zero.

Notăm cu c_j , $j = 1, 2, \dots, m$, m numere pozitive pentru care:

$$Q_{2j-1}(c_j) - Q_{2j}(c_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

atunci putem admite drept limită superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.1) numărul $R = \max\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$.

Vom demonstra în continuare că are loc afirmația de mai sus.

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} Q_{2j-1}(x) - Q_{2j}(x) &= b_1^{(j)} \cdot x^{n_j} + b_2^{(j)} \cdot x^{n_j-1} + \dots + b_p^{(j)} \cdot x^{n_j-p+1} - \\ &- b_{p+1}^{(j)} \cdot x^{n_j-p} - b_{p+2}^{(j)} \cdot x^{n_j-p-1} - \dots - b_{p+q}^{(j)} \cdot x^{n_j-p-q+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

unde

$$b_s^{(j)} \geq 0, \quad s = 1, \dots, p+q$$

iar

$$b_1^{(j)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Dacă considerăm $x > 0$ și punem

$$\begin{aligned} (7.1.7) \quad Q_{2j-1}(x) - Q_{2j}(x) &= \\ &= x^{n_j-p+1} \left[\left(b_1^{(j)} \cdot x^{p-1} + b_2^{(j)} \cdot x^{p-2} + \dots + b_p^{(j)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b_{p+1}^{(j)}}{x} + \frac{b_{p+2}^{(j)}}{x^2} + \dots + \frac{b_{p+q}^{(j)}}{x^q} \right) \right], \end{aligned}$$

atunci observăm că funcțiile $Q_{2j-1}(x) - Q_{2j}(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ cresc atunci când variabila x crește, deci dacă $x > c_j > 0$ atunci $Q_{2j-1}(x) - Q_{2j}(x) > Q_{2j-1}(c_j) \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

De aici rezultă că dacă $x > R$ atunci $f(x) > 0$, deci toate rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.1) sunt mai mici decât R .

Exemplu numeric. Să se determine limitele rădăcinilor reale ale ecuației:

$$(7.1.8) \quad f(x) = 6x^5 + 3x^4 - 18x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = 0.$$

Pentru rezolvarea problemei de mai sus punem polinomul (7.1.8) sub forma

$$f(x) = Q_1(x) - Q_2(x) + Q_3(x) - Q_4(x)$$

unde avem

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= 6x^5 + 3x^4 \\ Q_2(x) &= 18x^3 + 12x^2 \\ Q_3(x) &= 9x \\ Q_4(x) &= +1. \end{aligned}$$

Se observă că putem lua $c_1 = 2$ deoarece $Q_1(2) - Q_2(2) = 48 > 0$, iar $c_2 = 1$ deoarece $Q_3(1) - 1 = 8 > 0$. Observăm deci, că drept margine superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației (7.1.8) putem lua $R = 2$.

Pentru marginea inferioară, consideră ecuația:

$$(7.1.9) \quad P_1(y) = y^5 - 9y^4 + 12y^3 + 18y^2 - 3y - 6.$$

Pentru această ecuație avem:

$$\begin{aligned} Q_1(y) &= y^5 \\ Q_2(y) &= 9y^4 \\ Q_3(y) &= 12y^3 + 18y^2 \\ Q_4(y) &= 3y + 6. \end{aligned}$$

Se observă că putem lua $c_1 = 10$ și $c_2 = 1$, de unde rezultă $\frac{1}{r} = 10$, adică $r = \frac{1}{10}$, ceea ce înseamnă că toate rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.8) sunt mai mari decât 0, 1.

Pentru a calcula marginea inferioară a rădăcinilor negative în (7.1.8) facem schimbarea de variabilă $x = -z$ și obținem ecuația

$$P_2(z) = 6z^5 - 3z^4 - 18z^3 + 12z^2 + 9z + 1 = 0,$$

pentru care avem:

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= 6z^5; \\ Q_2(z) &= 3z^4 + 18z^3; \\ Q_3(z) &= 12z^2 + 9z + 1; \\ Q_4(z) &= 0. \end{aligned}$$

Putem lua $c_1 = 2$ și $c_2 = 0$, atunci avem $R' = 2$, adică toate rădăcinile negative ale ecuației (7.1.8) sunt mai mari decât -2 .

Pentru marginea superioară a rădăcinilor negative vom considera polinomul:

$$P_3(u) = u^5 + 9u^4 + 12u^3 - 18u^2 - 3u + 6,$$

pentru care avem

$$\begin{aligned} Q_1(u) &= u^5 + 9u^4 + 12u^3 \\ Q_2(u) &= 18u^2 + 3u \\ Q_3(u) &= 6 \\ Q_4(u) &= 0. \end{aligned}$$

Putem atunci considera $c_1 = 1$ și $c_2 = 0$, ceea ce ne conduce la faptul că toate rădăcinile negative ale ecuației (7.1.8) sunt mai mici decât -1 .

Un alt mod de a determina marginea superioară a rădăcinilor pozitive ale unei ecuații de forma (7.1.1) se obține din următoarea teoremă.

Teorema 7.1.3. *Dacă pentru $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, polinomul f și toate derivatele sale f' , f'' , ..., $f^{(n)}$ sunt nenegative, atunci toate rădăcinile pozitive ale ecuației (7.1.1) sunt mai mici sau egale cu c .*

Demonstrație. Dacă $x > c$, atunci ținând cont de egalitatea

$$f(x) = f(c) + f''(c)(x - c) + \frac{f'(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n,$$

rezultă că $f(x) > 0$, adică $f(x)$ nu poate avea rădăcini mai mari decât c .

7.2 Calculul valorilor unui polinom și a derivatelor sale

În cadrul paragrafului de față ne vom ocupa de câteva metode de calcul ale valorilor unui polinom și ale derivatelor sale.

Vom începe prin expunerea unei scheme cunoscute de calcul a valorilor unui polinom și anume, vom expune principiul schemei lui Hörner.

Așa cum vom vedea, metodele de calcul a valorilor derivatelor unui polinom se bazează în principiu tot pe această schemă de calcul și pe formula lui Taylor.

1. Schema lui Hörner pentru calculul valorilor unui polinom

Considerăm un polinom P cu coeficienți reali, definit prin egalitatea:

$$(7.2.1) \quad P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

unde a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ sunt numere reale și reprezintă coeficienții polinomului P .

Fie $\xi \in \mathbb{R}$ un număr real dat. pentru calculul valorii polinomului P pentru $x = \xi$ se poate aplica schema lui Hörner, care constă într-o aranjare convenabilă a termenilor polinomului P , astfel încât calculele să poată fi executate cât mai simplu și cu un număr cât mai mic de operații.

Se observă fără dificultate că valoarea polinomului P pentru $x = \xi$ se poate pune sub următoarea formă:

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned} P(\xi) = & ((\dots(((a_0\xi + a_1)\xi + a_2) + a_3)\xi + \dots \\ & \dots a_{n-2})\xi + a_{n-1})\xi + a_n \end{aligned}$$

care ne conduce în final la calculul succesiv al numerelor reale b_i , $i = \overline{0, n}$ date de egalitățile:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0; \\
 b_1 &= b_0\xi + a_1; \\
 (7.2.3) \quad b_2 &= b_1\xi + a_2; \\
 &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 b_{n-1} &= b_{n-2}\xi + a_{n-1}; \\
 b_n &= b_{n-1}\xi + a_n.
 \end{aligned}$$

Din (7.2.2) și (7.2.3) deducem egalitatea:

$$(7.2.4) \quad P(\xi) = b_n.$$

Este ușor de observat că numerele reale b_i , $i = \overline{1, n-1}$ reprezintă coeficienții cîțui polinom P prin împărțirea polinomului P prin polinomul $x - \xi$.

Pentru simplificare, calculele se pot aranja în următorul tabel:

a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n	$x = \xi$
$+$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{n-1}	b_n	

Semnificația calculelor din schema de mai sus rezultă din formulele (7.2.3).

2. Schema lui Hörner generalizată.

Vom semnala în continuare faptul că schema expusă la punctul precedent, poate fi aplicată repetat, obținând astfel algoritmi de calcul care pot fi folosiți pentru calculul valorilor derivatelor unui polinom.

Fie $y \in \mathbb{R}$ și $h = x - y$. Notăm cu A_i , $i = \overline{0, n}$ coeficienții polinomului $P(y + h)$, ordonat după puterile lui h , adică

$$(7.2.5) \quad P(y + h) = A_0h^n + A_1h^{n-1} + \dots + A_{n-1}h + A_n.$$

Dacă în egalitatea de mai sus facem $h = 0$, atunci obținem

$$(7.2.6) \quad A_n = P(y).$$

Împărțind polinomul P cu $x - y$ obținem

$$(7.2.7) \quad P(x) = P_1(x)(x - y) + P(y),$$

iar pe de altă parte din (7.2.5), pentru $h = x - y$ deducem

$$(7.2.8) \quad P(x) = [A_0(x - y)^{n-1} + A_1(x - y)^{n-2} + \dots + A_{n-1}](x - y) + A_n,$$

adică pentru P_1 avem următoarea reprezentare

$$(7.2.9) \quad P_1(x) = A_0(x - y)^{n-1} + A_1(x - y)^{n-2} + \cdots + A_{n-1},$$

sau

$$(7.2.10) \quad P_1(y + h) = A_0h^{n-1} + A_1h^{n-2} + \cdots + A_{n-1},$$

de unde pentru $h = 0$ avem

$$(7.2.11) \quad A_{n-1} = P_1(y).$$

Fie acum

$$(7.2.12) \quad P_1(x) = (x - y)P_2(x) + P_1(y).$$

Procedând ca mai sus, deducem ușor următoarea egalitate

$$(7.2.13) \quad A_{n-2} = P_2(y),$$

unde

$$(7.2.14) \quad P_2(x) = A_0(x - y)^{n-2} + A_1(x - y)^{n-3} + \cdots + A_{n-3}(x - y) + A_{n-2}.$$

Presupunem acum prin inducție că am reușit să determinăm coeficienții A_{n-i} , $i = \overline{1, k}$, $k < n$ și anume

$$(7.2.15) \quad A_{n-i} = P_i(y), \quad i = \overline{1, k},$$

unde

$$(7.2.16) \quad P_i(x) = A_0(x - y)^{n-i} + A_1(x - y)^{n-i-1} + \cdots + A_{n-i}, \\ i = \overline{1, k}.$$

Pentru $i = k + 1$ avem

$$(7.2.17) \quad P_k(h) = (x - y)P_{k+1}(y) + P_k(y),$$

de unde, ținând cont de (7.2.16), obținem

$$(7.2.18) \quad P_{k+1}(x) = A_0(x - y)^{n-k-1} + A_1(x - y)^{n-k-2} + \cdots + A_{n-k-1},$$

din care, dacă punem $x = y$, obținem

$$(7.2.19) \quad A_{n-k-1} = P_{k+1}(y).$$

Am dovedit nai sus că, prin împărțiri succesive ale polinomului P prin $x - y$, avem posibilitatea să calculăm coeficienții A_{n-i} ; $i = 1, 2, \dots, n$ din dezvoltarea (7.2.5), adică

$$(7.2.20) \quad A_{n-i} = P_i(y), \quad A_0 = P(y), \quad i = \overline{1, n}.$$

După cum rezultă din formula re recurență (7.2.17), coeficienții polinoamelor P_i , $i = \overline{1, n}$ și valorile acestor polinoame pentru $x = y$ se pot obține cu schema Hörner aplicată repetat. Mai precis, pentru a obține coeficienții unui polinom oarecare P_{k+1} și valoarea sa pentru $x = y$, se aplică schema lui Hörner polinomului P_k .

Comparând egalitatea (7.2.5) cu următoarea dezvoltare după formula lui Taylor a polinomului P , avem

$$P(y + h) = \frac{P^{(n)}(y)}{n!} h^n + \dots + \frac{P'(y)}{1!} h + P(y),$$

de unde vom obține, pentru calculul valorilor derivatelor successive ale lui P , următoarele formule

$$(7.2.21) \quad P(y) = A_n, \quad P^{(k)}(y) = k! A_{n-k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Exemplu numeric. Se dă polinomul

$$P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1.$$

Se cere să se calculeze valoarea acestui polinom și a derivatelor sale successive pentru $x = 2$. Pentru rezolvare, vom aplica schema lui Hörner generalizată, care a fost descrisă mai sus, și avem

3	2	-1	-3	0	1	$x = 2$
3	8	15	27	54	109	$P(2) = 109; P_1(2 + h) = 3h^4 + 8h^3 + 15h^2 + 27h + 54$
3	14	43	113	280		$P_1(2) = 280; P_2(2 + h) = 3h^3 + 14h^2 + 43h + 113$
3	20	83	279			$P_2 = 279; P_3(2 + h) = 3h^2 + 20h + 83$
3	26	135				$P_3(2) = 135; P_4(2 + h) = 3h + 26$
3	32					$P_4(2) = 32; P_5(2 + h) = 32$
3						$P_5(2) = 3$

Din tabelul precedent obținem, pentru valoarea polinomului dat și a derivatelor sale successive, următoarele:

$$P(2) = 109; \quad P'(2) = 1! A_4 = 280; \quad P''(2) = 2! A_3 = 558;$$

$$P'''(2) = 3! A_2 = 810; \quad P^{(4)}(2) = 4! A_1 = 768; \quad P^{(5)}(2) = 5! A_0 = 360.$$

7.3 Separarea rădăcinilor ecuațiilor

În rezolvarea numerică a ecuațiilor, separarea rădăcinilor acestora joacă un rol important, deoarece în problemele practice avem nevoie deseori numai de anumite rădăcini ale ecuației în cauză.

Vom încerca în cele ce urmează să precizăm ce înțelegem prin separarea rădăcinilor unei ecuații.

Considerăm o ecuație de forma:

$$(7.3.1) \quad f(x) = 0$$

unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, $[a, b]$ fiind un interval al axei reale.

Definiția 7.3.1. Vom spune că am separat rădăcinile ecuației (7.3.1) din intervalul $[a, b]$, dacă am pus în evidență, în intervalul $[a, b]$, un număr de $n + 1$ puncte consecutive $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$, astfel încât pe fiecare interval (a_i, a_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n - 1$ să existe cel mult o rădăcină a ecuației (7.3.1).

Indicăm în cele ce urmează câteva metode simple care se pot folosi la separarea rădăcinilor ecuațiilor.

1. Metoda algebrică. Sirul lui Rolle

Această metodă se bazează pe următoarele două teoreme bine cunoscute din analiza matematică.

Teorema 7.3.1. Dacă funcția f este continuă și monotonă pe intervalul $[\alpha, \beta]$ și dacă $f(\alpha)f(\beta) < 0$, atunci în intervalul (α, β) există o singură rădăcină a ecuației (7.3.1). Dacă însă $f(\alpha)f(\beta) > 0$, atunci în intervalul (α, β) ecuația (7.3.1) nu are nici o rădăcină.

Teorema 7.3.2. Dacă funcția $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface următoarele proprietăți:

- (i) funcția f este continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$;
- (ii) funcția f este derivabilă pe intervalul (α, β) ;
- (iii) $f(\alpha) = f(\beta)$,

atunci există un punct $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f'(\xi) = 0$.

O consecință imediată a acestei teoreme este următoarea:

Consecință 7.3.1. Dacă a și b sunt două rădăcini reale consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$, atunci între aceste rădăcini există cel mult o rădăcină reală a ecuației (7.3.1).

Din aceste teoreme putem deduce că pentru a separa rădăcinile reale cuprinse în intervalul $[a, b]$ ale ecuației (7.3.1), este suficient să cunoaștem rădăcinile reale ale derivatei lui f cuprinse în intervalul $[a, b]$. Fie a_1, a_2, \dots, a_n rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$. Atunci pentru a separa rădăcinile ecuației (7.3.1) trebuie să calculăm valorile funcției f pentru aceste rădăcini precum și valorile lui f în punctele $a_0 = a$ și $a_{n+1} = b$ pe care le vom așeza în următorul tabel

x	a_0	a_1	\dots	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}
$f(x)$	$f(a_0)$	$f(a_1)$	\dots	$f(a_{n-1})$	$f(a_n)$	$f(a_{n+1})$

Sirul finit $(a_i)_{i=1}^n$ poartă denumirea de sirul lui Rolle.

Bazându-ne pe Teorema 7.3.1, putem trage concluzia că dacă există un i , $0 \leq i \leq n$ astfel încât $f(a_i)f(a_{i+1}) < 0$, atunci există o rădăcină reală a ecuației (7.3.1) cuprinsă în intervalul (a_i, a_{i+1}) .

Dacă $f(a_i)f(a_{i+1}) > 0$, atunci în intervalul (a_i, a_{i+1}) nu există nici o rădăcină a ecuației (7.3.1). Dacă însă există un număr a_i pentru care $f(a_i) = 0$, atunci a_i este o rădăcină multiplă cu ordin de multiplicitate cel puțin 2.

Exemplu numeric. Să se separe rădăcinile ecuației

$$f(x) = x^5 - 15x^3 - 8 = 0.$$

Pentru a separa rădăcinile acestei ecuații, rezolvăm ecuația:

$$f(x) = 5x^4 - 45x^2 = 0$$

pentru care găsim

$$a_1 = a_2 = 0 \quad a_3 = -3 \quad \text{și} \quad a_4 = 3$$

cu ajutorul cărora formăm următorul tabel

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	154	-8	-170	$+\infty$

Din tabelul de mai sus deducem că ecuația considerată are trei rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, -3)$, $x_2 \in (-3, 0)$ și $x_3 \in (3, +\infty)$.

2. Metoda experimentală

Pentru a aplica metoda experimentală pe care o vom descrie mai jos, este necesar să găsim marginile rădăcinilor ecuației în cauză. Dacă funcția f din

ecuația (7.3.1) este un polinom, atunci putem aplica metoda din paragraful 7.1.

Fie a marginea inferioară a rădăcinilor și b marginea superioară a lor. Împărțim intervalul $[a, b]$ într-un număr convenabil de subintervale prin punctele de diviziune $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ și calculăm valorile funcției f pe aceste puncte. Dacă există un număr i , $0 \leq i < n$ pentru care $f(a_i)f(a_{i+1}) < 0$, atunci în intervalul $[a_i, a_{i+1}]$ avem un număr impar de rădăcini. Dacă însă $f(a_i)f(a_{i+1}) > 0$, atunci în intervalul $[a_i, a_{i+1}]$ există cel mult un număr par de rădăcini ale ecuației (7.3.1).

Evident, metoda descrisă mai sus poate să nu ne conducă la nici un rezultat, dar dacă împărțim intervalul $[a, b]$ într-un număr mare de părți prin punctele de diviziune amintite, avem şanse să găsim unele subintervale în care se găsesc rădăcini ale ecuației date.

Dacă funcția f este un polinom și dacă am reușit să separăm unele dintre rădăcini și apoi să le calculăm, atunci, evident, putem reduce gradul polinomului care intervine în ecuația respectivă.

Exemplu numeric. Să se separe rădăcinile ecuației

$$f(x) = x^4 + 0,9x^3 - 11,1x^2 - 5,416x + 20,9666 = 0,$$

cuprinse în intervalul $[-4, 3]$.

Pentru a separa rădăcinile acestei ecuații, vom calcula valorile polinomului f pe punctele $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ și 3 .

Aplicăm schema lui Hörner pentru calculul valorilor polinomului dat pe aceste puncte și avem:

1	0,9	-11,1	-5,416	20,9666	a	
1	-3,1	1,3	-10,616	63,4306	-4	$x_1 \in (-4, 3)$
1	-2,1	-4,8	8,984	-5,9854	-3	
1	-1,1	-8,9	12,384	-3,8014	-2	$x_2 \in (-2, -1)$
1	-0,1	-11,	5,584	15,3826	-1	
1	0,9	-11,1	-5,416	20,9666	0	
1	1,9	-9,2	14,616	6,3506	1	$x_3 \in (1, 2)$
1	2,9	-5,3	-16,016	-11,0654	2	
1	3,9	0,6	-3,616	10,1186	3	$x_4 \in (2, 3)$

În cazul exemplului de mai sus am reușit să separăm toate rădăcinile ecuației considerate, deoarece ecuația are gradul 4.

3. Metoda grafică. Această metodă constă în a pune ecuația (7.3.1) sub forma:

$$g(x) - h(x) = 0$$

unde g și h au formă simplă și pot fi ușor reprezentate grafic. Dacă (Γ_1) și (Γ_2) sunt graficele celor două funcții reprezentate față de același sistem de coordinate, atunci abscisele punctelor de intersecție ale celor două grafice ne dau rădăcinile ecuației (7.3.1).

Exemplu numeric. Să se separe rădăcinile ecuației

$$x - \sin x = 0.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme vom considera funcțiile:

$$g(x) = x$$

și

$$h(x) = \sin x,$$

pe care le reprezentăm grafic în figura 7.3.1.

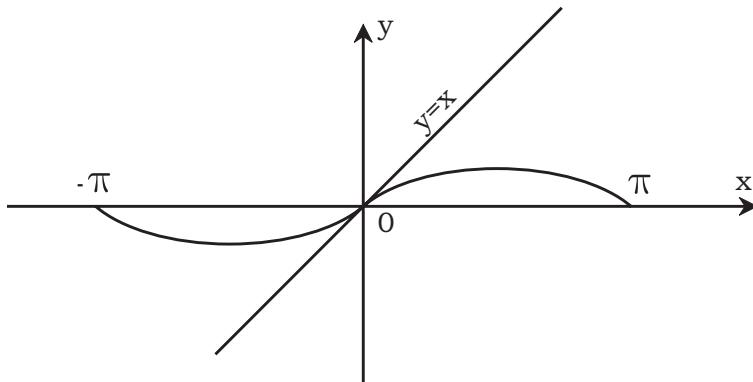


Figura 7.3.1

Din figura 7.3.1 se observă că ecuația considerată are o singură rădăcină $x_1 = 0$. Acest fapt se constată ușor dacă observăm că funcția $h(x) = \sin x$ are în punctul $x = 0$ derivată egală cu 1 și deci dreapta $g(x) = x$ este tangentă în originea axelor de coordonate la curba amintită. Mai observăm că funcția $h(x) = \sin x$ este strict concavă în intervalul $(0, \pi)$ și deci pe acest interval graficul acestei funcții rămâne sub tangenta la grafic în originea

axelor de coordonate. Pe intervalul $(-\pi, 0)$ funcția $h(x) = \sin x$ este strict convexă și deci ea rămâne tot timpul deasupra tangentei în origine la această curbă pe intervalul amintit.

Dacă aplicăm metoda algebrică bazată pe teorema lui Rolle, se constată ușor că vom găsi același rezultat.

În cadrul paragrafului de față am expus pe scurt câteva metode simple de separare a rădăcinilor. După cum s-a observat, problema separării rădăcinilor unei ecuații atrage după sine o serie de complicații și ea se poate rezolva de la caz la caz, depinzând în multe cazuri de problema practică care ne conduce la ecuația respectivă.

De multe ori în problemele practice, însuși fenomenul studiat ne poate furniza date asupra distribuției rădăcinilor ecuațiilor care intervin.

7.4 Aplicații ale metodelor de tip Cebâșev la rezolvarea ecuațiilor algebrice

Metodele de tip Cebâșev pentru rezolvarea ecuațiilor au fost tratate în capitolul 4. Aceste metode, aşa cum am văzut, conțin pe lângă valorile funcției f și valorile derivatelor sale de diferite ordine.

În cazul când f este un polinom, putem folosi pentru calculul valorilor sale și al valorilor derivatelor sale, schema lui Hörner generalizată pe care am expus-o în paragraful 7.2.

Pentru claritatea expunerii, reamintim pe scurt principiul metodelor de tip Cebâșev pe care le-am expus în capitolul 4.

Fie

$$(7.4.1) \quad f(x) = 0$$

o ecuație, unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I fiind un interval al axei reale.

Presupunem că funcția f este derivabilă pe intervalul I de atâtea ori cât vom avea nevoie (în cazul când f este un polinom, atunci ea admite derivate de orice ordin).

Mai admitem că ecuația (7.4.1) are o singură rădăcină $\bar{x} \in I$ și $f'(\bar{x}) \neq 0$ pentru orice $x \in I$.

Din faptul că $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, rezultă că f este o bijecție pe I și deci există funcția f^{-1} astfel încât $f^{-1}(f(x)) = x$ pentru orice $x \in I$.

Fie $x_0 \in I$ un punct oarecare, atunci formula (4.5.2) ne conduce la următoarea aproximare pentru rădăcina \bar{x} a ecuației (7.4.1)

$$(7.4.2) \quad \bar{x} = f^{-1}(0) \approx \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{[f^{-1}(y)]^{(i)}}{i!} [f(x_0)]^i.$$

În capitolul 2 am stabilit formulele de calcul ale derivatelor succesive ale funcției inverse. Din cele spuse în paragraful 2.3 rezultă pentru calculul derivatelor succesive ale funcției f^{-1} , următoarea formulă

$$(7.4.3) \quad [f^{-1}(y)]^{(k)} = \frac{X_k(x)}{[f'(x)]^{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

unde $y = f(x)$ iar funcțiile $X_k(x)$ au următoarele expresii:

$$(7.4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = 1 \\ X_2(x) = -f''(x) \\ X_3(x) = -f'''(x)f'(x) + 3[f''(x)]^2 \\ X_4(x) = f^{(4)}(x)[f'(x)]^2 + 10f'''(x)f''(x)f'(x) - 15[f''(x)]^3 \\ X_5(x) = -f^{(5)}(x)[f'(x)]^3 + 15f^{(4)}(x)f''(x)[f'(x)]^2 + \\ \quad + 10[f'''(x)]^2[f'(x)]^2 - 105f'''(x)[f''(x)]^2f'(x) + \\ \quad + 105[f''(x)]^4 \\ X_6(x) = -f^{(6)}(x)[f'(x)]^4 + 21f^{(5)}(x)f''(x)[f'(x)]^3 + \\ \quad + 35f^{(4)}(x)f'''(x)[f'(x)]^3 \\ \quad - 210f^{(4)}(x)[f''(x)]^2[f'(x)]^2 - \\ \quad - 280[f'''(x)]^2f''(x)[f'(x)]^2 \\ \quad + 1260f'''(x)[f''(x)]^3f'(x) - 945[f''(x)]^5 \end{array} \right.$$

Pe măsură ce numărul k crește, funcțiile X_k au o formă din ce în ce mai complicată. În cazul polinoamelor, forma acestor funcții se simplifică mult dacă acestea din urmă nu au un grad prea mare.

Pentru exemplificare, dăm în continuare forma funcțiilor (7.4.4) pentru polinoamele de grade respectiv 2, 3 și 4.

1. Funcția f este polinom de grad 2. Atunci avem:

$$f'''(x) = f^{(4)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0,$$

ceea ce ne conduce la următoarele formule:

$$(7.4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = 1; \\ X_2(x) = -f''(x); \\ X_3(x) = 3[f''(x)]^2; \\ X_4(x) = -15[f''(x)]^3; \\ X_5(x) = 105[f''(x)]^4; \\ X_6(x) = -945[f''(x)]^5. \end{array} \right.$$

2. Funcția f este un polinom de gradul 3. În acest caz avem:

$$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = 0 ,$$

ceea ce ne conduce la următoarele formule:

$$(7.4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = 1; \\ X_2(x) = -f''(x); \\ X_3(x) = -f'''(x)f'(x) + 3[f''(x)]^2; \\ X_4(x) = 10f'''(x)f''(x)f'(x) - 15[f''(x)]^3; \\ X_5(x) = 10[f'''(x)]^2[f'(x)]^2 - 105f'''(x)[f''(x)]^2f'(x) + \\ \quad + 105[f''(x)]^4; \\ X_6(x) = -280[f'''(x)]^2f''(x)[f'(x)]^2 + \\ \quad + 1260f'''(x)[f''(x)]^3f'(x) - 945[f''(x)]^5 . \end{array} \right.$$

3. Funcția f este un polinom de gradul 4. În cazul de față avem:

$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0 .$$

Tinând cont de cele de mai sus și de (7.4.4), deducem:

$$(7.4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = 1; \\ X_2(x) = -f''(x); \\ X_3(x) = -f'''(x)f'(x) + 3[f''(x)]^2; \\ X_4(x) = -f^{(4)}(x)[f'(x)]^2 + 10f'''(x)f''(x)f'(x) - 15[f''(x)]^3; \\ X_5(x) = 15f^{(4)}(x)f''(x)[f'(x)]^2 + 10[f'''(x)]^2[f'(x)]^2 - \\ \quad - 105f'''(x)[f''(x)]^2f'(x) + 105[f''(x)]^4; \\ X_6(x) = 35f^{(4)}f'''(x)[f'(x)]^3 - 210f^{(4)}(x)[f''(x)]^2[f'(x)]^2 - \\ \quad - 280[f'''(x)]^2f''(x)[f'(x)]^2 + \\ \quad + 1260f'''(x)[f''(x)]^3f'(x) - 945[f''(x)]^5 . \end{array} \right.$$

Evident, pe măsură ce gradul polinomului f crește, formulele (7.4.4) nu se simplifică prea mult, aceste formule se simplifică eventual atunci când considerăm derivate la funcția f^{-1} de ordin mare.

Dacă f este polinom de grad n și dacă ținem cont de formulele (7.2.21), atunci formulele (7.4.4) se pot exprima simplu cu ajutorul coeficienților A_{n-k} , $k = 0, 1, \dots, n$, calculați cu schema lui Hörner generalizată. Avem

atunci pentru derivatele succesive ale funcției f^{-1} următoarele formule:

$$(7.4.8) \quad [f^{-1}(y)]^{(k)} = \frac{X_k(x)}{A_{n-1}^{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

unde funcțiile X_k , $k = 1, 2, \dots$, au următoarea formă:

$$(7.4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = 1; \\ X_2(x) = -2A_{n-2}; \\ X_3(x) = -6A_{n-3}A_{n-1} + 12A_{n-2}^2; \\ X_4(x) = -24A_{n-4}A_{n-1}^2 + 120A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1} - 120A_{n-2}^3; \\ X_5(x) = -120A_{n-5}A_{n-1}^3 + 720A_{n-4}A_{n-2}A_{n-1}^2 + \\ \quad + 320A_{n-3}^2A_{n-1}^2 - 2520A_{n-3}A_{n-2}^2A_{n-1} + 1680A_{n-2}^4; \\ X_6(x) = -720A_{n-6}A_{n-1}^4 + 5040A_{n-5}A_{n-2}A_{n-1}^3 + \\ \quad + 5040A_{n-4}A_{n-3}A_{n-1}^3 - 20160A_{n-4}A_{n-2}^2A_{n-1}^2 - \\ \quad - 20160A_{n-3}^2A_{n-2}A_{n-1}^2 + 60480A_{n-3}A_{n-2}^3A_{n-1} - \\ \quad - 30240A_{n-2}^5 \end{array} \right.$$

unde din formulele (7.2.21) rezultă

$$(7.4.10) \quad A_n = f(x) \quad \text{iar} \quad f^{(k)}(x) = k! \cdot A_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

și

$$(7.4.11) \quad A_{n-k} = 0, \quad k = n+1, n+2, \dots,$$

Folosind acum formulele (4.5.3), (4.5.10) și iterând apoi succesiv, vom obține din (7.4.7) și (7.4.8) următoarele metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice.

1. Metoda lui Newton. După cum se știe, metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuației (7.4.1) constă în construcția sirului $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de aproximății ale rădăcinilor ecuației respective, cu ajutorul următorului procedeu:

$$(7.4.12) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad x_0 \in I, \quad i = 0, 1, \dots,$$

unde f este așa cum am precizat, un polinom.

Notăm cu $A_n^{(i)}$ și $A_{n-1}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots$, valorile polinomului f , respectiv valorile derivatei sale pe punctul x_i .

În acest caz (7.4.12) se scrie

$$(7.4.13) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{A_n^{(i)}}{A_{n-1}^{(i)}}, \quad i = 0, 1, \dots; \quad x_0 \in I.$$

Observăm fără dificultate că în cazul când funcția f este polinom, atunci metoda lui Newton se poate aplica ușor, fără a mai calcula direct derivata funcției f , valorile sale calculându-se simplu, prin aplicarea repetată a schemei lui Hörner. Dacă calculăm direct derivata lui f și apoi valorile sale, este nevoie să facem în principiu $n - 1$ înmulțiri în plus, care pe lângă faptul că necesită timp în plus pentru cel care execută calculele, poate introduce și anumite erori.

Dacă calculele se execută cu un calculator electronic, atunci metoda (7.4.13) ne scutește de păstrarea în memoria calculatorului a coeficienților derivatei lui f sau de formarea lor pe parcursul calculelor în calculator, valorile derivatei lui f calculându-se în cazul nostru cu aceeași schemă cu care se calculează și valoarea lui f .

Exemplu numeric. Să se calculeze rădăcinile reale ale ecuației:

$$f(x) = 7x^3 + 6x^2 + 27x - 4 = 0.$$

Se observă că ecuația dată are o rădăcină reală deoarece $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se constată ușor că această rădăcină este cuprinsă în intervalul $(0, 1)$ deoarece $f(0) = -4$ și $f(1) = 36$. Luăm $x_0 = 0,5$ și aplicăm schema lui Hörner generalizată combinată cu metoda (7.4.13). Aranjăm calculele în următorul tabel:

7	6	27	-4	$x_0 = 0,5$
7	9,5	31,75	11,875	$A_3^{(0)} = 11,875$
7	13	38,25	-	$A_2^{(0)} = 38,25$
7	6	27	-4	$x_1 = 0,18954249$
7	7,32679743	28,38873943	1,38087236	$A_3^{(1)} = 1,38087236$
7	8,65359486	30,02896335	-	$A_2^{(1)} = 30,02896335$
7	6	27	-4	$x_2 = 0,14355781$
7	7,00490467	28,00560877	0,02042386	$A_3^{(2)} = 0,02042386$
7	8,00980934	29,15547946	-	$A_2^{(2)} = 29,15547946$
7	6	27	-4	$x_3 = 0,14285730$
7	7,00000110	28,00000126	0,00000458	$A_3^{(3)} = 0,00000458$
7	8,00000220	29,14285997	-	$A_2^{(3)} = 29,14285997$
-	-	-	-	$x_4 = 0,14285715$

Tabelul 7.4.1

Observând că ecuația considerată admite rădăcină exactă $x = \frac{1}{7} = 0,142857142$, constatăm că ultima aproximare obținută $x_4 = 0,14285715$ diferă cu puțin de rădăcina exactă.

Schema logică a algoritmului lui Newton pentru rezolvarea unei ecuații algebrice cu metoda (7.4.13), combinată cu schema lui Hörner, se găsește în figura 7.4.1.

2. Metoda lui Cebâșev de ordinul 3. După cum rezultă din (4.5.10), metoda lui Cebâșev de ordinul 3 constă în construcția sirului de aproximării $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ cu ajutorul următoarei metode iterative:

$$(7.4.14) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{1}{2} \frac{f(x_i)f^2(x_i)}{[f'(x_i)]^3}, \quad i = 0, 1, \dots \quad x_0 \in I.$$

Această metodă, dacă folosim formulele (7.4.9) și (7.4.10), ne conduce la următorul procedeu iterativ:

$$(7.4.15) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{A_n^{(i)}}{A_{n-1}^{(i)}} - \frac{A_{n-2}^{(i)} [A_n^{(i)}]^2}{[A_{n-1}^{(i)}]^3}, \quad i = 1, 2, \dots \quad x_0 \in I,$$

unde prin $A_n^{(i)}$, $A_{n-1}^{(i)}$ și $A_{n-2}^{(i)}$ am notat aproximările obținute cu schema lui Hörner generalizată pentru $f(x_i)$, $f'(x_i)$ și $\frac{1}{2}f''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$.

Vom trata în continuare același exemplu numeric de la punctul precedent, dar cu metoda lui Cebâșev de ordinul 3. În acest caz calculele se pot aranja ca în tabelul 7.4.2.

7	6	27	-4	$x_0 = 0,5$
7	9,5	31,75	11,875	$A_3^{(0)} = 11,875$
7	13	38,25	-	$A_2^{(0)} = 38,25$
7	16,5	-	-	$A_1^{(0)} = 16,5$
7	6	27	-4	$x_1 = 0,14217906$
7	6,99525342	27,99457856	-0,01975714	$A_3^{(0)} = -0,01975714$
7	7,99050684	29,13066131	-	$A_2^{(1)} = 29,130661131$
7	8,98575982	-	-	$A_1^{(1)} = 8,98575982$
-	-	-	-	$x_2 = 0,14285714$

Tabelul 7.4.2

Schema logică a metodei lui Newton

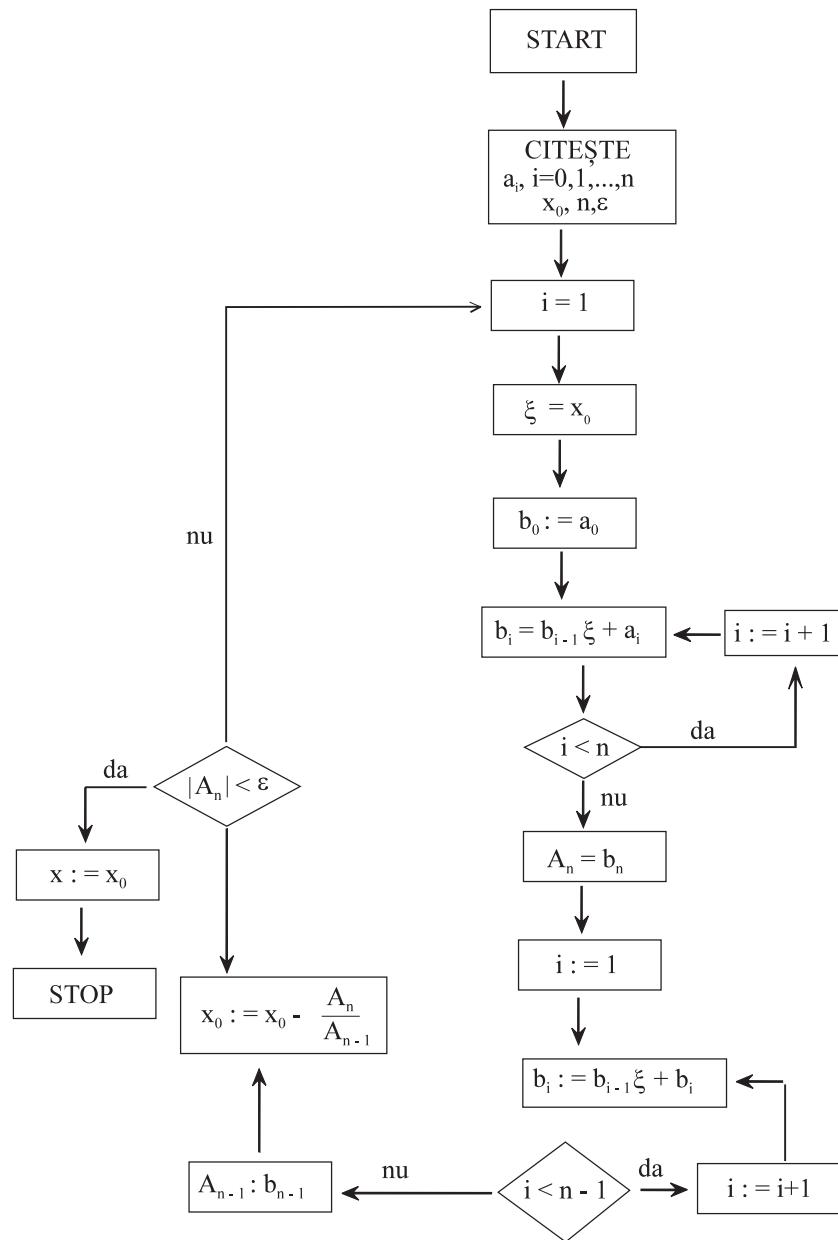


Figura 7.4.1

Schema logică a metodei lui Cebâșev de ordinul 3

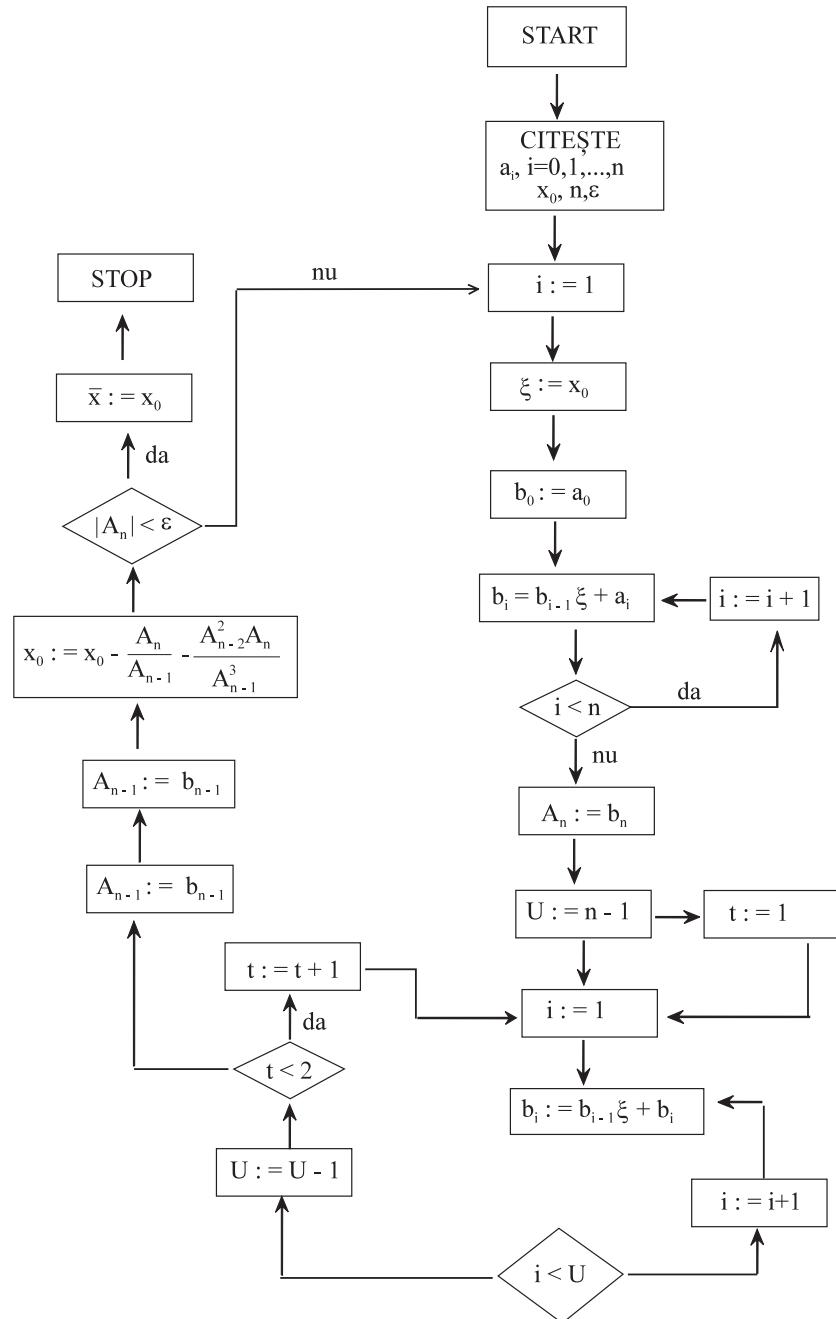


Figura 7.4.2

După cum se observă, cu metoda lui Cebâșev de ordinul 3 am obținut aceeași aproximare, dar executând numai doi pași de iterare față de 4 pînă câtă am executat cu metoda lui newton. Schema logică pentru metoda lui Cebâșev se găsește în figura 7.4.2.

3. Metoda lui Cebâșev de ordinul 4. Pentru a obține această metodă ne bazăm pe metoda (4.5.11). Dacă înlocuim în (4.5.10) derivatele funcției f cu expresiile lor date de formula (7.4.8) și dacă ținem cont de (7.4.9), obținem următoarea metodă de iterare:

$$(7.4.16) \quad \begin{aligned} x_{i+1} = & x_i - \frac{A_n^{(i)}}{A_{n-1}^{(i)}} - \frac{A_{n-2}^{(i)} [A_n^{(i)}]^2}{[A_{n-1}^{(i)}]^3} - \\ & - \frac{\left\{ 2 [a_{n-2}^{(i)}]^2 - A_{n-3}^{(i)} A_{n-1}^{(i)} \right\} [A_n^{(i)}]^3}{[A_{n-1}^{(i)}]^5}, \\ & i = 0, 1, \dots \quad x_0 \in I \end{aligned}$$

unde $A_{n-k}^{(i)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ sunt valorile calculate cu schema lui Hörner ale polinomului de gradul n , f și ale derivatelor sale f' , f'' și f''' pe punctul x_i , $i = 1, 2, \dots$.

4. Metodele lui Cebâșev de ordinul mai mare decât 4. Vom considera la acest punct metoda lui Cebâșev de ordin k unde $k > 4$. Pentru a obține această metodă trebuie să considerăm în formula (4.5.2) primii k termeni și dacă iterăm succesiv, obținem un sir $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ai cărui termeni sunt dați de următorul procedeu iterativ:

$$(7.4.17) \quad \begin{aligned} x_{i+1} = & x_i - \frac{X_1(x_i) A_m^{(i)}}{A_{m-1}^{(i)}} + \frac{1}{2!} \frac{X_2(x_i) [A_m^{(i)}]^2}{[A_{m-1}^{(i)}]^2} + \dots + \\ & + (-1)^k \frac{X_{k-1}(x_i) [A_m^{(i)}]^{k-1}}{(k-1)! [A_{m-1}^{(i)}]^{2k-3}}; \quad i = 0, 1, \dots \quad x_0 \in I \end{aligned}$$

unde valorile $X_s(x_i)$, $s = 1, 2, \dots, k-1$ se calculează cu formulele (7.4.8) pentru $s = 1, 2, \dots, 6$ iar pentru $s = 7, 8, \dots, k-1$ se poate folosi formula generală (2.3.1), din care se deduc formulele de calcul ale valorilor derivatelor de ordin mai mare decât 6 ale funcției f^{-1} , în funcție de valorile funcției f ,

care apoi se înlocuiesc cu valorile A_{n-p} , $p = 0, 1 \dots$ obținute cu schema lui Hörner generalizată.

Exemplu numeric. Considerăm ecuația:

$$\begin{aligned} f(x) = & x^{19} + x^{18} + x^{17} + 2x^{16} + 2x^{15} + 2x^{14} + 3x^{13} + 3x^{12} + 3x^{11} + \\ & + 4x^{10} + 4x^9 + 4x^8 + 5x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 6x^3 + \\ & + 6x^2 + 7x - 60 = 0. \end{aligned}$$

Se observă că această ecuație are o singură rădăcină pozitivă deoarece $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$. Se mai observă că $f(0) \cdot f(1) < 0$, deci această rădăcină este cuprinsă în intervalul $(0, 1)$. Folosind pe rând metodele din acest paragraf pentru $x_0 = 1$ se obțin pe rând rezultatele cuprinse în tabelul 7.4.3, care oferă aproximări ci o eroare de ordinul 10^{-13} .

i	Metoda lui Newton	Metoda lui Cebâșev de ordinul 3
0	1,0000000000000000	1,0000000000000000
1	0,980430528375734	0,978620628981484
2	0,978401968851076	0,978382801953949
3	0,978382803291936	0,978382801605363
4	0,978382801605363	—
i	Metoda lui Cebâșev de ordinul 4	Metoda lui Cebâșev de ordinul 5
0	1,0000000000000000	1,0000000000000000
1	0,978412432402334	0,978386612942405
2	0,978382801605363	0,978382801605363

Tabelul 7.4.3

Din tabelul 7.4.3 se observă că în cazul metodelor lui Cebâșev de ordinele 3, 4 și 5, primele trei zecimale ale primei iterații coincid cu primele trei zecimale ale rădăcinii $\bar{x} = 0,978382801605363$.

În cazul metodei lui Cebâșev de ordinul 5, se observă că primele cinci zecimale ale primei iterații coincid cu primele cinci zecimale ale rădăcinii \bar{x} .

Din cele arătate mai sus, se observă că în acest caz, pentru a obține aproximări cu o eroare de 10^{-3} , a fost suficient să se aplique o singură dată una din metodele lui Cebâșev de ordinele 3, 4 și 5.

7.5 Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu ajutorul seriilor

În paragraful de față vom aplica formula de calcul a derivatelor funcției inverse pentru a da o metodă simplă de calcul a rădăcinilor ecuațiilor algebrice.

Pentru simplificare, vom considera ecuația de gradul 3 de forma

$$(7.5.1) \quad f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

unde $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Presupunem că rădăcinile ecuației (7.5.1) sunt reale și distințte. Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației, vom admite că $x_1 < x_2 < x_3$. Notăm cu α_1 și α_2 rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ și cu x_0 rădăcinile ecuației $f''(x) = 0$, adică $x_0 = -\frac{a_1}{3a_0}$. Punem $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$, $f''(x_0) = y''_0$ și $f'''(x_0) = y'''_0$.

Prin un calcul elementar se verifică imediat că are loc egalitatea

$$(7.5.2) \quad f(x_0) = \frac{1}{2}[f(\alpha_1) + f(\alpha_2)].$$

Vom nota în continuare prin q expresia

$$(7.5.3) \quad q = \frac{y_0^2 y'''_0}{[y'_0]^3}$$

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 7.5.1. *Dacă ecuația (7.5.1) are trei rădăcini reale distințte și dacă $x_1 < x_2 < x_3$, atunci pentru calculul lui x_2 are loc formula*

$$(7.5.4) \quad x_2 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{3s}{s} \frac{1}{2s+1} \left(-\frac{q}{6}\right)^s$$

Demonstratie. Funcția f este monotonă în intervalul (α_1, α_2) . Pe acest interval rezultă că funcția f are o funcție inversă f^{-1} . Deoarece funcția f este un polinom, rezultă că funcția f^{-1} admite deriveate de orice ordin pentru orice $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Din cele constatate mai sus și din faptul că $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$ rezultă că funcția f^{-1} se poate dezvolta în serie Taylor în vecinătatea punctului y_0 , adică:

$$(7.5.5) \quad f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y - y_0)^n}{n!} [f^{-1}(y_0)]^{(n)}$$

Pentru a determina raza de convergență a seriei (7.5.5) observăm că funcția f^{-1} are două puncte singulare $y_{\alpha_1} = f(\alpha_1)$ și $y_{\alpha_2} = f(\alpha_2)$, unde derivata $[f^{-1}(y)]'$ devine infinită. Din (7.5.2) rezultă că raza de convergență a seriei (7.5.5) este

$$(7.5.6) \quad R = |y_0 - f(\alpha_1)| = |y_0 - f(\alpha_2)|$$

de unde rezultă că seria (7.5.5) este convergentă pentru orice $y \in (f(\alpha_1), f(\alpha_2))$.

Cum $f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) < 0$, putem considera că $0 \in (f(\alpha_1), f(\alpha_2))$.

Dar $x_2 = f^{-1}(0)$ și $f^{-1}(y_0) = x_0$, de unde rezultă:

$$(7.5.7) \quad x_2 = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y_0^n}{n!} [f^{-1}(y_0)]^n.$$

Folosind formula (2.3.1) care ne dă derivatele succesive ale funcției f^{-1} , vom calcula derivata de ordin $2s+1$ a funcției f^{-1} .

Pentru aceasta observăm că $f^{(k)}(x_0) = 0$ dacă $k \geq 4$. Deoarece $f''(x_0) = 0$ rezultă că, pentru ca un termen din (2.3.1) să fie diferit de zero, este necesar și suficient ca $i_2 = i_4 = \dots = i_k = 0$.

Condițiile (2.3.2) se reduc atunci la următoarea

$$(7.5.8) \quad \begin{cases} 2i_3 &= k-1 \\ i_1 + i_3 &= k-1 \end{cases}$$

Observăm mai întâi că pentru $k = 2s, s \in \mathbb{N}$, $[f^{-1}(y_0)]^{(k)} = 0$, deoarece prima ecuație din (7.5.8) este incompatibilă. Pentru $k = 2s+1$ $s = 0, 1, \dots$, singura soluție a sistemului este $i_1 = i_3 = s$, care ne conduce la următoarea formulă:

$$(7.5.9) \quad \begin{aligned} [f^{-1}(y_0)]^{2s+1} &= \frac{(3s)!(-1)^s}{s!(y'_s)^{4s+1}} \cdot (y'_0)^s \cdot \left(\frac{y'''_0}{6}\right)^s = \\ &= (-1)^s \frac{(3s)!}{s!(y'_0)^{4s+1}} \left(\frac{y'_0 y'''_0}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

pe care o substituim în (7.5.7) și obținem formula (7.5.4).

Dacă aplicăm criteriul de convergență al lui D'Alembert al seriilor cu termeni pozitivi, se constată că seria (7.5.4) este absolut convergentă dacă

$$(7.5.10) \quad |q| < \frac{8}{9}$$

Vom da în continuare o formulă de aproximare pentru suma seriei (7.5.4). Observăm că rădăcina x_2 dată de (7.5.4) se poate scrie sub forma

$$(7.5.11) \quad x_2 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6} \left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{55}{216}q^4 + \frac{91}{432}q^5 - \dots \right) \right] = \\ = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6}h(q) \right].$$

Considerăm în continuare seria:

$$(7.5.12) \quad \ln(1+q) = q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{5}q^5 - \dots$$

și observăm că primii 3 termeni din dezvoltarea lui $\ln(1+q)$ și $h(q)$ coincid, iar următorii doi diferă puțin.

Tinând cont de cele de mai sus, din (7.5.11) și (7.5.12) deducem următoarea formulă de aproximare

$$(7.5.13) \quad x_2 \approx x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6} \ln(1+q) \right].$$

În legătură cu formula de aproximare dată mai sus are loc următoarea teoremă:

Teorema 7.5.2. *Dacă ecuația (7.5.1) are trei rădăcini reale și distincte, $x_1 < x_2 < x_3$, atunci are loc egalitatea*

$$(7.5.14) \quad x_2 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6} \ln(1+q) \right] + \frac{2(x_3 - x_1) \cdot \theta}{9} g(q),$$

unde $|\theta| < 1$ și

$$(7.5.15) \quad g(q) = \sum_{s=4}^{\infty} \left[\binom{3s}{6} \frac{1}{2s+1} \frac{1}{6^s} - \frac{1}{6^s} \right] (-q)^s.$$

Demonstratie. Din (7.5.11) și (7.5.12) deducem:

$$(7.5.16) \quad x_2 - x_0 + \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6} \ln(1+q) \right] = \\ = -\frac{y_0}{y'_0} \sum_{s=4}^{\infty} \left[\binom{3s}{s} \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{1}{6^s} - \frac{1}{6^s} \right] (-q)^s.$$

Deoarece $f''(x_0) = 0$ vom avea

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$$

și

$$y'_0 = a_0[(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_3) + (x_0 - x_2)(x_0 - x_3)] .$$

Notăm $b = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)$, $t = \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{x_3 - x_1}$, de unde deducem

$$x_3 = x_1 + 2b; \quad x_2 = x_1 + b + bt \quad \text{și} \quad x_0 = x_1 + b + \frac{1}{3}bt .$$

Dacă considerăm faptul că $x_1 < x_2 < x_3$, atunci rezultă imediat că $-1 < t < 1$. Calculând y_0 și y'_0 în funcție de a_0 , b și t , obținem:

$$y_0 = \frac{2b^3 a_0}{27} (9t - t^3); \quad y'_0 = -\frac{b^2}{3} a_0(t^2 + 3) ,$$

de unde avem:

$$-\frac{y_0}{y'_0} = \frac{2b}{9} \cdot \frac{9t - t^3}{t^2 + 3} = \frac{x_3 - x_1}{9} \cdot \frac{9t - t^3}{t^2 + 3}$$

dar din faptul că $-1 < t < 1$ rezultă

$$-2 < \frac{9t - t^3}{t^2 + 3} < 2, \quad \text{adică} \quad \frac{9t - t^3}{t^2 + 3} = 2\theta, \quad \text{unde} \quad |\theta| < 1 ,$$

ceea ce ne demonstrează teorema enunțată.

Formula (7.5.14) nu ne permite să evaluăm eroarea de aproximare atunci când rădăcina x_2 se calculează cu ajutorul formulei (7.5.13), deoarece diferența $x_3 - x_1$ nu este cunoscută. Această formulă este totuși destul de bună pentru calcule a căror precizie nu se cere să fie prea mare, deoarece valorile funcției $g(q)$ sunt mici, aşa cum rezultă din tabelul 7.5.1.

Dacă exprimăm pe q în funcție de t obținem:

$$q = -\frac{8}{9} \frac{(9t - t^3)^2}{(t^2 + 3)^3}$$

și

$$g(q) = \frac{4t^2}{9 - t^2} + \frac{1}{6} \ln(1 + q)$$

t	0	$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,3$	$\pm 0,4$	$\pm 0,5$
$-q$	0	$0,026343$	$0,101608$	$0,215265$	$0,352207$	$0,495644$
$g(q)$	0	$2,25 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-7}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$3,42 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-4}$
t	$\pm 0,6$		$\pm 0,7$	$\pm 0,8$	$\pm 0,9$	± 1
$-q$	$0,629729$		$0,742033$	$0,82442$	$0,87328$	$\frac{8}{9}$
$g(q)$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$5,13 \cdot 10^{-2}$	$1,34 \cdot 10^{-1}$

Tabelul 7.5.1

Folosind valorile funcției $g(q)$ din tabelul 7.5.1, se poate evalua marginea erorii de aproximare a lui x_2 cu ajutorul formulei

$$x_2 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \left[1 - \frac{1}{6} \ln(1+q) \right] - \frac{y_0}{y'_0} g(q)\theta.$$

Metoda descrisă în cadrul paragrafului de față se poate extinde și la ecuații de grad mai mare decât 3, dacă rădăcinile ecuației sunt reale și distincte.

Valorile funcției f și ale derivatelor sale succesive pe punctul x_0 se pot calcula cu ajutorul schemei lui Hörner generalizată, adică vom avea:

a_0	a_1	a_2	a_3	
a_0	b_1	b_2	A_3	$x_0 = -\frac{a_1}{3a_0}$
a_0	b_1	A_2		
a_0	0			
a_0				

de unde deducem:

$$y_0 = A_3; \quad y'_0 = A_2; \quad y''_0 = 0; \quad y'''_0 = 6a_0$$

care ne dă

$$(7.5.17) \quad q = \frac{6A_3^2 a_0}{A_2^3}$$

și

$$(7.5.18) \quad x_2 \approx x_0 - \frac{A_3}{A_2} \left[1 - \frac{1}{6} \ln(1+q) \right].$$

Exemplu numeric. Considerăm ecuația

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

care admite rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6$.

În acest caz avem $x_0 = \frac{9}{3} = 3$ și schema lui Hörner generalizată ne dă:

1	-9	20	-12	
1	-6	2	-	$x_0 = 3$
1	-3	-7	-6	-
1	0	-	-	-
1	-	-	-	-

de unde deducem $A_3 = -6; A_2 = -7; A_1 = 0; A_0 = 1$.

Folosind coeficienții de mai sus din (7.5.17) și (7.5.18) deducem:

$$q = -\frac{6 \cdot 36}{7^3} = -\left(\frac{6}{7}\right)^3$$

și

$$\begin{aligned} x_2 &\approx 3 - \frac{6}{7} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \ln \left[1 - \left(\frac{6}{7} \right)^3 \right] \right\} = \\ &= 3 - \frac{6}{7} \left[1 - \frac{1}{6} (\ln 172 - 3 \ln 7) \right]. \end{aligned}$$

REFERINȚE

În redactarea acestui capitol am folosit lucrările [27], [44], [84], [88], [115], [145] și [146].

Capitolul 8

Metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I cu valori inițiale

8.1 Enunțul problemei

Scopul acestui capitol este de a prezenta metode numerice de aproximare a soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I.

Definiția 8.1.1. O problemă cu valori inițiale pentru un sistem de N ecuații diferențiale ordinare de ordinul I, are forma:

$$(8.1.1) \quad y' = f(t, y), \quad t \in [a, b]$$

$$(8.1.2) \quad y(a) = y_0,$$

unde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este un interval finit, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ și

$$(8.1.3) \quad f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

este o funcție dată.

Soluția acestei probleme este o funcție derivabilă $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ care satisfac ecuația (8.1.1) cu condiția (8.1.2).

Dacă $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ și $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_N^0)$, atunci problema (8.1.1)-(8.1.2) se mai poate scrie:

$$(8.1.1') \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \dots, y_N) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, \dots, y_N) \\ \dots \\ \frac{dy_N}{dt} = f_N(t, y_1, \dots, y_N) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

$$(8.1.2'') \quad y_1(a) = y_0^1, y_2(a) = y_0^2, \dots, y_N(a) = y_0^N.$$

Existența și unicitatea soluției pentru problema (8.1.1)-(8.1.2) este una din problemele fundamentale ale analizei. Pentru a studia această problemă avem nevoie de următoarea definiție:

Definiția 8.1.2. Vom spune că funcția f dată în (8.1.3) este lipschitziană în raport cu variabila a două, dacă există o constantă $L > 0$ a.î.

$$(8.1.4) \quad \|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|,$$

pentru orice $t \in [a, b]$ și pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^N$, unde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o normă arbitrară.

Următoarea teoremă furnizează condiții de existență și unicitate a soluției problemei cu date inițiale (8.1.1)-(8.1.2) și condiții de dependență continuă a soluției de datele inițiale ale problemei.

Teorema 8.1.1. Fie $f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ o funcție continuă dată, care satisface condiția Lipschitz (8.1.4). Au loc următoarele două afirmații:

- (a) Problema cu valori inițiale (8.1.1) – (8.1.2) are o soluție unică $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, continuă și diferențiabilă.
- (b) Pentru două funcții continue și diferențiabile $y, \bar{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, care au proprietatea că

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad t \in [a, b], \quad y(a) = y_0 \\ \bar{y}' &= f(t, \bar{y}), \quad t \in [a, b], \quad \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{aligned}$$

este adeverată inegalitatea:

$$(8.1.5) \quad \|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq e^{L(t-a)} \|y_0 - \bar{y}_0\|, \quad t \in [a, b].$$

Demonstrația acestei teoreme se poate găsi în [122].

Uneori este util și următorul rezultat ce dă informații asupra netezimii soluției problemei cu valori inițiale.

Teorema 8.1.2. *Dacă funcția (8.1.3) admite derivate parțiale continue, până la ordinul n în raport cu fiecare variabilă, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, atunci soluția y a problemei (8.1.1)-(8.1.2) aparține clasei $C_{[a,b]}^{(n+1)}$.*

8.2 Metode de aproximare cu un singur pas

Deoarece pentru problemele de tipul (8.1.1)-(8.1.2), de cele mai multe ori nu se poate determina soluția exactă, este necesară folosirea unor metode, ce ne dau posibilitatea să obținem aproximări ale soluțiilor.

O clasă de metode pentru rezolvarea aproximativă a problemei cu valori inițiale (8.1.1)-(8.1.2) este formată din metodele de aproximare cu un singur pas, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

Fie o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$(8.2.1) \quad \Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

$h_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, h_k fiind pasul k al diviziunii.

Definiția 8.2.1. *Metoda cu un pas (explicită) pentru aproximarea soluției problemei cu valori inițiale (8.1.1) – (8.1.2) este de forma:*

$$(8.2.2) \quad u_{k+1} = u_k + h_k \cdot \varphi(t_k, u_k; h_k),$$

$k = 0, 1, \dots, n - 1$, $u_0 = y_0$, unde $\varphi : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată.

Observația 8.2.1. 1°. Aproximarea u_k depinde de u_{k-1} dar nu depinde (direct) de u_{k-2}, u_{k-3}, \dots , din acest motiv metoda se numește "cu un pas".

2°. Funcția φ este necesar să fie continuă în raport cu t și k și lipschitziană în a doua variabilă și să satisfacă condiția de consistență, adică:

$$(8.2.3) \quad \|\varphi(t, u, h) - \varphi(t, v, h)\| \leq L_1 \|u - v\|,$$

$t \in [a, b]$, $0 < h \leq b - t$, $u, v \in \mathbb{R}^N$, respectiv

$$(8.2.4) \quad \varphi(t, y(t), 0) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [a, b],$$

unde $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ este soluția exactă a problemei (8.1.1) – (8.1.2).

Metodele de aproximare cu un pas pot fi clasificate după ordinul de convergență.

Definiția 8.2.2. O metodă cu un pas de forma (8.2.2) pentru problema cu valori inițiale (8.1.1) – (8.1.2) are **ordinul de convergență** $p \geq 1$, dacă are loc relația:

$$(8.2.5) \quad \max_{l=0,1,\dots,n} \|u_l - y(t_l)\| \leq ch_{\max}^p,$$

unde $h_{\max} := \max_{l=0,1,\dots,n-1} \{h_e\}$, pentru o constantă $c \geq 0$ independentă de diviziunea Δ .

Pentru studiul ordinului de convergență al metodelor cu un sigur pas, este necesar să introducem și următoarea noțiune:

Definiția 8.2.3. Se numește **eroare de iterare locală** în punctul $(t + h, y(t + h))$ relativă la pasul h a problemei cu valori inițiale (8.1.1) – (8.1.2), diferența:

$$\eta(t, h) = y(t) + h\varphi(t, y(t); h) - y(t + h),$$

unde $t \in [a, b]$, $0 \leq h \leq b - t$.

Definiția 8.2.4. Spunem că o metodă cu un pas (8.2.2) pentru problema cu valori inițiale (8.1.1) – (8.1.2) are **ordinul de consistență** $p \geq 1$, dacă eroarea de iterare locală satisface inegalitatea:

$$(8.2.6) \quad \|\eta(t, h)\| \leq ch^{p+1},$$

pentru orice $t \in [a, b]$, $0 \leq h \leq b - t$, unde c este o constantă pozitivă independentă de t și h .

Teorema 8.2.1. Dacă metoda cu un pas (8.2.2) are ordinul de consistență $p \geq 1$ și funcția φ de iterare indeplinește condiția (8.2.3), atunci ordinul de convergență al metodei (8.2.2) este p , adică

$$(8.2.7) \quad \max_{k=0,1,\dots,n} \|u_k - y(t_k)\| \leq c_p \cdot h_{\max}^p,$$

cu $h_{\max} = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \{h_k\}$ și $c_p = \frac{c}{L_1} (e^{L_1(b-a)} - 1)$, iar c este dată de relația (8.2.6).

Demonstrație. Notând cu $a_k = u_k - y_k$ și $a_{k+1} = y_{k+1} - y_k$ pentru $k = 0, 1, \dots, n$ și cu $\eta_k = \eta(t_k, h_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se observă că pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$, putem scrie:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h_k \varphi(t_k, y_k; h_k) - \eta_k \\ u_k &= u_k + h_k \varphi(t_k, u_k; h_k), \end{aligned}$$

de unde

$$a_{k+1} = a_k + h_k (\varphi(t_k, u_k; h_k) - \varphi(t, y_k; h_k)) + \eta_k$$

și

$$\begin{aligned} \|a_{k+1}\| &\leq \|a_k\| + h_k \|\varphi(t_k, u_k; h_k) - \varphi(t, y_k; h_k)\| + \|\eta_k\| \leq \\ &\leq (1 + h_k L_1) \|a_k\| + c h_k^{p+1} \leq (1 + h_k L_1) \|a_k\| + h_k c h_{\max}^p. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra inegalitatea (8.2.7) vom folosi metoda inducției.

Pentru $k = 0$, inegalitatea este verificată, presupunând-o adevărată pentru k vom demonstra inegalitatea pentru $k + 1$, adică

$$\begin{aligned} \|a_{k+1}\| &\leq (1 + h_k L_1) \|a_k\| + h_k c h_{\max}^p \leq \\ &\leq (1 + h_k L_1)(1 + h_{k-1} L_1) \|a_{k-1}\| + (1 + h_k L_1) h_{k-1} c \cdot h_{\max}^p + c h_{\max}^p. \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea $1 + h_k L_1 \leq e^{h_k L_1}$, egalitatea $\sum_{j=0}^{k-1} h_j = x_k$, notațiile $q = c h_{\max}^p$ și $r = \max_h h_k L_1$, avem:

$$\begin{aligned} \|a_{k+1}\| &\leq e^{(h_k + h_{k-1})L_1} \|a_{k-1}\| + q(r + 1) \leq \\ &\leq e^{(h_k + h_{k-1} + h_{k-2})L_1} \|a_{k-2}\| + q((r + 1) + r + 1) + 1 \leq \\ &\leq e^{(b-a)L_1} \|a_0\| + q[(r + 1)^k + \dots + (r + 1) + 1] = \\ &= e^{(b-a)L_1} \|a_0\| + \frac{q}{r} ((1 + r)^k - 1). \end{aligned}$$

Dar, deoarece pentru orice $x \geq 0$ și $m \in \mathbb{N}^*$ avem $(1+x)^m \leq e^{mx}$ și $\|a_0\| = 0$, rezultă:

$$\begin{aligned} \|a_{k+1}\| &\leq \frac{q}{r} (e^{(b-a)L_1} - 1) = \frac{c \cdot h_{\max}^p}{L_1 \max_h h_k} (e^{(b-a)L_1} - 1) \leq \\ &\leq \frac{c}{L_1} (e^{(b-a)L_1} - 1). \end{aligned}$$

8.3 Metoda lui Euler

Metoda lui Euler este una din metodele ce face parte din clasa metodelor cu un pas, și anume este metoda cu un pas având ordinul de consistență egal cu unu.

Metoda lui Euler de aproximare a soluției problemei cu valori inițiale (8.1.1)-(8.1.2) are forma:

$$(8.3.1) \quad u_{k+1} = u_k + h_k \cdot f(t_k, u_k)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, n - 1$ și $u_0 = y_0$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 8.3.1. *Dacă $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție care admite derivate parțiale de ordinul 1 continue, în raport cu fiecare parabolă, atunci metoda lui Euler are ordinul de consistență $p = 1$.*

Demonstrație. Dezvoltând în serie Taylor până la ordinul doi în vecinătatea punctului $t \in [a, b]$, soluția problemei cu valori inițiale $y' = f(t, y)$, $y(a) = y_0$, se obține:

$$y(t + h) = y(t) + y'(t)h + y''(\xi) \frac{h^2}{2!}$$

unde $\xi = t + \theta h$, $\theta \in (0, 1)$.

Tinând cont că $y' = f(t, y)$, eroarea de iterare locală va fi:

$$\eta(t, h) = y(t) + hf(t, y(t)) - y(t + h) = -y''(\xi) \frac{h^2}{2}$$

de unde rezultă ușor

$$\|\eta(t, h)\|_\infty \leq ch^2, \quad \text{cu} \quad c = \frac{1}{2} \max_{\tau \in [a, b]} \|y''(\tau)\|,$$

adică, conform definiției, metoda lui Euler are ordinul de consistență $p = 1$.

Observația 8.3.1. *Derivabilitatea până la ordinul 2 a funcției y și continuitatea funcției y'' este garantată de Teorema 8.1.2.*

8.4 Metode de aproximare cu un pas având ordinul de consistență $p = 2$

Plecând de la metoda cu un pas (8.2.2), pentru a obține metode cu ordinul de consistență $p = 2$, se consideră funcții de iterare de forma:

$$(8.4.1) \quad \varphi(t, u; h) = a_1 f(t, a) + a_2 f(t + b_1 h, u + b_2 h f(t, u)),$$

pentru $t \in [a, b]$, $0 \leq h \leq b - t$, $u \in \mathbb{R}^N$, unde constantele a_1 , a_2 , b_1 și b_2 vor fi determinate.

Următoarea teoremă dă condițiile în care metoda cu un pas, unde φ este dată de (8.4.1), are ordinul de consistență $p = 2$.

Teorema 8.4.1. *Metoda cu un pas (8.2.2) cu funcția de iterare de forma (8.4.1), are ordinul de consistență $p = 2$ dacă funcția $f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$*

admete deriveate parțiale, până la ordinul 2, cu deriveate parțiale de ordinul 2 continue pe tot domeniul de definiție și dacă coeficienții a_1 , a_2 , b_1 și b_2 satisfac condițiile:

$$(8.4.2) \quad a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 b_2 = \frac{1}{2}.$$

Demonstrație. Considerăm cazul $N = 1$ și dezvoltând în serie Taylor funcția $\varphi(t, y(x); h)$ în jurul lui $h = 0$ și funcția $y(t)$ în jurul lui $t = 0$, vom obține:

$$\begin{aligned} \varphi(t, y(t); h) &= a_1 f(t, y(t)) + a_2 f(t, u(t)) + \\ &+ h a_2 b_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + h a_2 b_2 y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + O(h^2) = \\ &= \left[(a_1 + a_2) f + h \left(a_2 b_1 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 b_2 f \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] (t, y(t)) + O(h^2). \end{aligned}$$

Analog pentru funcția $y(t)$ avem:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + y''(t) \frac{h^2}{2} + O(h^3).$$

Derivând membru cu membru în raport cu t relația $y'(t) = f(t, y(t))$, se obține:

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) y'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) (t, y(t)).$$

Folosind acest rezultat în dezvoltarea în serie Taylor a funcției $y(t)$ și ipoteza (8.4.2) în expresia funcției $\varphi(t, y(x); h)$, rezultă:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + \left[h f + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{h^2}{2} \right] (t, y(t)) + O(h^3) = \\ &= y(t) + h \varphi(t, y(t); h) + O(h^3). \end{aligned}$$

Eroarea de iterare locală devine:

$$\eta(t, h) = y(t) + h \varphi(t, y(t); h) - y(t+h) = O(h^3)$$

adică

$$\|\eta(t, h)\| \leq ch^3$$

și teorema este demonstrată.

În continuare vom prezenta două variante ale metodei de aproximare cu un pas cu ordinul de consistență $p = 2$, de tipul dat de relația (8.4.1).

8.4.1 Metoda Euler modificată

Această metodă are funcția de iterare de forma:

$$(8.4.3) \quad \varphi(t, u; h) = f\left(t + \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} f(t, y)\right)$$

unde $t \in [a, b]$ și $0 \leq h \leq b - t$, $u \in \mathbb{R}^N$. Relația (8.4.3) rezultă din (8.4.1) pentru $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ și $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, iar algoritmul iterativ (8.2.2) poate fi reprezentat în acest caz, în doi pași, astfel:

$$\begin{aligned} u_{k+1/2} &= u_k + \frac{h_k}{2} f(t_k, u_k), \quad t_{k+1/2} = t_k + \frac{h_k}{2}, \\ u_{k+1} &= u_k + h_k f(t_{k+1/2}, u_{k+1/2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

8.4.2 Metoda lui Heun

Funcția de iterare în acest caz are forma:

$$\varphi(t, u; h) = \frac{1}{2} [f(t, u) + f(t + h, u + h f(t, u))],$$

unde $t \in [a, b]$ și $0 \leq h \leq b - t$, $u \in \mathbb{R}^N$. Această funcție rezultă din (8.4.1) pentru $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ și $b_1 = b_2 = 1$. Algoritmul (8.2.2) poate fi prezentat astfel:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_k + h_k f(t_k, u_k) \\ w_{k+1} &= u_k + h_k f(t_{k+1}, v_{k+1}) \\ u_{k+1} &= \frac{1}{2}(v_{k+1} + w_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

8.5 Metode cu un pas având cu ordinul de consistență $p = 4$

Din această clasă de metode face parte metoda Runge-Kutta clasică, cu funcția de iterare dată sub forma:

$$\varphi(t, u; h) = \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

unde $t \in [a, b]$, $0 \leq h < b - t$, $u \in \mathbb{R}^N$, iar $k_1 = f(t, u)$, $k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} k_1\right)$, $k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} k_2\right)$ și $k_4 = f(t + h, u + h k_3)$.

Se poate arăta ușor că metoda Runge-Kutta ce corespunde funcției φ de mai sus, pentru o funcție suficient de netedă f , are ordinul de consistență $p = 4$.

8.6 Metode de aproximare multipas a soluțiilor problemelor cu valori inițiale

Pentru a mări ordinul de convergență a soluțiilor aproximative a problemelor cu valori inițiale (8.1.1)-(8.1.2), se folosesc așa numitele metode de aproximare multipas.

Definiția 8.6.1. *Metoda multipas sau cu m pași pentru rezolvarea aproximativă a problemei cu valori inițiale (8.1.1)–(8.1.2), pe o rețea echidistantă, constă în determinarea valorilor u_{k+m} din relațiile:*

$$(8.6.1) \quad \sum_{j=0}^m \alpha_j u_{k+j} = h\varphi(t_k, u_k, \dots, u_{k+m}; h),$$

pentru fiecare $k = 0, 1, \dots, n - m$, unde coeficienții $\alpha_j \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_m \neq 0$ sunt dați. Funcția de iterare φ este definită astfel:

$$(8.6.2) \quad \varphi : [a, b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

iar punctele diviziuni sunt:

$$(8.6.3) \quad t_k = a + kh \quad \text{pentru } k = 0, 1, \dots, n, \quad \text{cu } h = \frac{b-a}{n}.$$

Valorile inițiale $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}^N$ nu sunt date.

Observația 8.6.1. 1°. Definiția 8.6.1 trebuie completată cu o procedură de initializare pentru a obține valorile inițiale pe toată diviziunea, adică $u_0 = y_0$ dat din (8.1.2), iar $u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}^N$ pot fi determinate, de exemplu, furnizat de o metodă cu un pas printr-un algoritm.

2°. Metoda (8.6.1) se numește **implicită** dacă funcția φ conține necunoscuta u_{k+m} , iar dacă funcția φ nu depinde de u_{k+m} , metoda se numește **explicită**.

3°. Dacă funcția φ din (8.6.1) are forma particulară

$$\varphi(t, u_0, \dots, u_m; h) = \sum_{j=0}^m \beta_j f(t + jh, u_j)$$

cu coeficienții β_j dați, atunci (8.6.1) se numește **metoda multipas liniară**.

*Ca un caz particular bine cunoscut, amintim metoda lcu 2 pași iniară, adică **metoda punctului de mijloc**:*

$$u_{k+2} = u_k + 2hf(t_{k+1}, u_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2.$$

8.7 Ordin de convergență, ordin de consistență și stabilitate

Fie u_i , $i = \overline{0, m-1}$, m aproximății pentru valorile $y(a+ih)$, $i = \overline{0, m-1}$, ale soluției problemei $y' = f(t, y)$, $y(a) = y_0$.

Definiția 8.7.1. Spunem că metoda multipas (8.6.1) pentru rezolvarea aproximativă a problemei cu valori inițiale $y = f(t, y)$, $y(a) = y_0$ are **ordinul de convergență** $p \geq 1$, dacă pentru o constantă $C \geq 0$ și valorile inițiale $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}^N$ din relațiile $\|u_l - y(t_l)\| \leq Ch^p$ pentru $l = 0, \dots, m-1$, rezultă că **eroarea globală de discretizare** satisface relația:

$$(8.7.1) \quad \max_{l=m, \dots, n} \|u_l - y(t_l)\| \leq Kh^p,$$

unde $K \geq 0$ este o constantă independentă de mărimea pasului h .

Definiția 8.7.2. Numim **eroare locală de discretizare** în punctul $(t, y(t))$ relativă la h , pentru metoda multipas (8.6.1), funcția η dată de relația:

$$(8.7.2)$$

$$\begin{aligned} \eta(t, h) &= \\ &= \left[\sum_{j=0}^m \alpha_j y(t + jh) \right] - h\varphi(t, y(t), y(t+h), \dots, y(t+mh); h), \quad 0 < h \leq \frac{b-t}{m}. \end{aligned}$$

Definiția 8.7.3. Spunem că metoda multipas (8.6.1) are **ordinul de consistență** $p \geq 1$, dacă există o constantă C și un număr suficient de mic $h_C > 0$ astfel încât următoarea estimare să aibă loc:

$$\|\eta(t, h)\| \leq Ch^{p+1}, \text{ pentru orice } a \leq t \leq h \text{ și } 0 \leq h \leq h_C.$$

În studiul convergenței metodei multipas, condiția lui Lipschitz asupra funcției $\varphi : [a, b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ din (8.6.1) are un rol important. Deci spunem că φ verifică condiția lui Lipschitz dacă există $L_\varphi > 0$ astfel încât

$$(8.7.3) \quad \|\varphi(t, v_0, \dots, v_m; h) - \varphi(t, w_0, \dots, w_m; h)\| \leq L_\varphi \sum_{j=0}^m \|v_j - w_j\|,$$

pentru $v_j, w_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{0, m}$.

Observația 8.7.1. 1°. În cazul metodei multipas liniară pentru rezolvarea problemei cu valori inițiale $y'(t) = f(t, y(t))$, $y_0 = y(a)$, în care funcția $f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ este continuă și satisfacă condiția lui Lipschitz dată de (8.1.4), relația (8.7.3) are loc pentru

$$L_\varphi = L_1 \max_{j=\overline{0,m}} |\beta_j|.$$

2°. Pentru determinarea valorilor u_{k+m} , $k = \overline{0, n-m}$, relațiile (8.6.1) conduc la ecuații de forma $u_{k+m} = \psi(u_{k+m})$. De aici rezultă că dacă φ verifică condiția (8.7.3), atunci funcția corespunzătoare ψ verifică condiția de contracție pentru $h\left(0, \frac{|\alpha_m|}{L_\varphi}\right)$. De aici rezultă că ecuațiile de forma (8.6.1) pentru h suficient de mic L_φ admit soluție unică.

Definiția 8.7.4. O metodă multipas de forma (8.6.1) spunem că este **stabilă (zero stabilă)**, dacă polinomul generat cu coeficienții α_i din algoritm (8.6.1)

$$(8.7.4) \quad P(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_0$$

satisfacă condiția rădăcinii sau condiția lui Dahlquist, adică:

- a) Toate rădăcinile z ale ecuației $P(z) = 0$ verifică relația $|z| \leq 1$;
- b) Dacă z este o rădăcină a lui $P(z) = 0$, pentru care $|z| = 1$, atunci z este rădăcină simplă.

8.8 Convergența metodei multipas

Următoarea teoremă oferă un rezultat important relativ la convergența metodei cu m pași [122].

Teorema 8.8.1. Dacă metoda cu m pași (8.6.1), de rezolvare aproximativă a problemei cu valori inițiale $y' = f(t, y(t))$, $y(a) = y_0$ este stabilă (zero stabilă) și dacă funcția φ satisfacă condiția lui Lipschitz (8.2.3), atunci există constantele $K \geq 0$ și $h_C > 0$ astfel încât pentru $0 < h = \frac{b-a}{n} \leq h_C$, are loc următoarea relație:

$$(8.8.1) \quad \max_{l=\overline{0,n}} \|u_l - y_l\| \leq K \left[\max_{l=\overline{0,m-1}} \|u_l - y_l\| + \left(\max_{u \leq t \leq b-mh} \|\eta_k\| \right) / h \right].$$

Demonstrație. Pentru schițarea demonstrației vom considera cazul scalar ($N = 1$) și $\alpha_m = 1$. Notațiile folosite sunt:

$$\begin{aligned} e_k &= u_k - y_k, & y_k &= y(t_k), & k &= \overline{0, n} \\ \eta_k &= \eta(t_k, h), & k &= \overline{0, n-m}. \end{aligned}$$

Cu ajutorul definiției 8.7.2, adică a erorii locale de discretizare, pentru $k = \overline{0, n-m}$ putem scrie:

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j y_{k+j} = h\varphi(t, y_k, \dots, y_{k+m}; h) + \eta_k,$$

iar din (8.6.1) rezultă

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j u_{k+j} = h\varphi(t_k, u_k, \dots, u_{k+m}; h).$$

Scăzând membru cu membru ultimele două egalități, avem:

$$(8.8.2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^m \alpha_j e_{k+j} &= h[\varphi(t_k, u_k, \dots, u_{k+m}; h) - \\ &\quad - \varphi(t, y_k, \dots, y_{k+m}; h)] - \eta_k = \delta_k - \eta_k, \end{aligned}$$

unde am notat $\delta_k = [\varphi(t_k, u_k, \dots, u_{k+m}; h) - \varphi(t, y_k, \dots, y_{k+m}; h)]h$.

Relația (8.8.2) se poate scrie sub formă matriceală:

$$(8.8.3) \quad E_{k+1} = AE_k + F_k, \quad \text{unde } A \in \mathbb{R}^{m \times m}, E_k, F_k \in \mathbb{R}^m$$

$$E_{k+1} = \begin{pmatrix} e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ \vdots \\ e_{k+m} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{m-2} & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix};$$

$$E_k = \begin{pmatrix} e_k \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_{k+m-1} \end{pmatrix}; \quad F_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_{k-\eta_k} \end{pmatrix}.$$

Din relația (8.8.3), folosind inducția matematică, se obține relația:

$$(8.8.4) \quad E_k = A^k E_0 + \sum_{\nu=0}^{k-1} A^{k-1-\nu} F_\nu, \quad k = \overline{0, n-m+1}.$$

Observăm că polinomul P din Definiția 8.7.4 este chiar polinomul caracteristic al matricei A și deci rădăcinile sale sunt valorile proprii ale lui A .

Pentru a demonstra stabilitatea metodei cu m pași este nevoie de proprietatea de mărginire a sirului matriceal $(A^k)_{k \geq 0}$, adică

$$(8.8.5) \quad \|A^k\|_\infty \leq C, \quad k = 0, 1, \dots$$

cu $C > 0$ o constantă arbitrară.

Următoarea lemă, pe care o dăm fără demonstrație, ne oferă un rezultat în acest sens.

Lema 8.8.1. *Fie matricea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Sirul matricelor A, A^2, A^3, \dots este mărginit dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:*

(i) *raza spectrală a matricei A este mai mică sau egală cu 1;*

(ii) *toate valorile proprii matricei A , cu proprietatea că $|\lambda| = 1$, corespund blocurilor Jordan de dimensiune 1 (ordinul de multiplicitate geometrică egal cu ordinul de multiplicitate algebric).*

Folosind relațiile (8.8.4) și (8.8.5), rezultă

$$(8.8.6) \quad \|E_k\|_\infty \leq C \left[\|E_0\|_\infty + \sum_{\nu=0}^{k-1} \|F_\nu\| \right], \quad k = \overline{0, n-m+1}.$$

Din relațiile (8.8.2) și (8.8.3) se poate obține o majorare a termenului al doilea din membrul drept al inegalității (8.8.6), reușind în final să demonstrezi relația (8.8.1).

O consecință directă a Teoremei 8.8.1 este

Corolarul 8.8.1. *O metodă cu m pași (8.6.1) stabilă și cu ordinul de consistență $p \geq 1$ și o funcție de iterare φ ce satisface condiția lui Lipschitz (8.2.3) are ordinul de convergență p .*

8.9 Ordinul de consistență în cazul metodelor multipas liniare

În cazul particular al metodelor multipas liniare, ordinul de consistență și eroarea locală de discretizare se pot determina mai simplu. În acest sens are loc următoarea:

Lema 8.9.1. *Fie o metodă cu m pași liniară*

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j u_{k+j} = h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t_{k+j}, u_{k+j}), \quad k = \overline{0, n-m},$$

pentru $f \in C^p([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ cu $p \geq 1$.

Dacă condițiile

$$(8.9.1) \quad \sum_{j=0}^m [j^k \alpha_j - k j^{k-1} \beta_j] = 0, \quad k = \overline{0, p},$$

sunt îndeplinite, atunci metoda cu m pași este consistentă de ordinul p. În plus, pentru $f \in C^{p+1}([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ eroarea locală de discretizare are forma

$$(8.9.2) \quad \eta(t, h) = C_{p+1} y^{(p+1)}(t) h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}),$$

$$\text{unde } C_{p+1} = \sum_{j=0}^m \left[\frac{j^{p+1} \alpha_j}{(p+1)!} - \frac{j^p \beta_j}{p!} \right].$$

Demonstrație. Se cunoaște din ipoteza teoremei că soluția problemei cu valori inițiale $y' = f(t, y)$, $y(a) = y_0$ va avea proprietatea $y \in C_{[a, b]}^{p+1}$. Dezvoltând în serie Taylor funcțiile y și y' în punctul $t \in [a, b - mh]$ se obține

$$\begin{aligned} y(t + jh) &= \sum_{k=0}^p \frac{y^{(k)}(t)}{k!} j^k h^k + \mathcal{O}(h^{p+1}), \\ y'(t + jh) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{y^{k+1}(t)}{k!} j^k h^k + \mathcal{O}(h^p) = \\ &= \sum_{k=0}^p k \frac{y^{(k)}(t)}{k!} j^{k-1} h^{k-1} + \mathcal{O}(h^p). \end{aligned}$$

Eroarea locală de discretizare va fi:

$$\begin{aligned} \eta(t, h) &= \sum_{j=0}^m \alpha_j y(t + jh) - h \sum_{j=0}^m \beta_j f(t + jh, y(t + jh)) = \\ &= \sum_{j=0}^m [\alpha_j y(t + jh) - h \beta_j y'(t + jh)] = \\ &= \sum_{k=0}^p \underbrace{\left[\sum_{j=0}^m j^k \alpha_j - k j^{k-1} \beta_j \right]}_{=0} \frac{y^{(k)}(t)}{k!} h^k + \mathcal{O}(h^{p+1}) = \\ &= \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{pentru } 0 < h \leq \frac{h-t}{m}, \end{aligned}$$

deoarece au loc relațiile (8.9.1).

Dacă înlocuim în ultima relație p cu $p + 1$ se obține (8.9.2), iar din definiția 8.7.3 rezultă că metoda cu m pași liniară are ordinul de consistență p .

Observația 8.9.1. *Dacă scriem explicit primele două ecuații din (8.9.1) pentru $k = 0$ și $k = 1$, obținem:*

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j = P(1) = 0, \text{ respectiv } \sum_{j=1}^m j\alpha_j = P'(1) = \sum_{j=0}^m \beta_j.$$

Din (8.7.3) știm că $P(z) = \alpha_m z^m + \dots + \alpha_0$, din prima relație obținută pentru $k = 0$ rezultă $P(1) = 0$, iar din a doua $P'(1) \neq 0$. De aici concluzionăm că o metodă cu m pași liniară, stabilă și cu ordinul de consistență p va avea proprietatea că $P'(1) \neq 0$.

8.10 Metode multipas liniare particulare

Un caz particular al metodelor multipas liniare se obține folosind formule de cuadratură pe noduri echidistante, cu diferențe finite regresive.

Fie $g_0, g_1, \dots, g_r \in \mathbb{R}^N$, $r+1$ elemente date și $x_0, x_0+h, \dots, x_0+rh, r+1$ noduri în intervalul $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$. Notăm cu $\Pi_r^N = \left\{ P(t) = \sum_{n=0}^r a_n t^n, a_n \in \mathbb{R}^N \right\}$.

Următoarea lemă dă forma polinomului de interpolare $P \in \Pi_r^N$, care verifică relațiile $P(x_0 + ih) = g_i$, $i = \overline{0, r}$.

Lema 8.10.1. *Fie o rețea de $r+1$ noduri echidistante $x_l = x_0 + lh$ pentru $l = 0, 1, \dots, r$, cu $x_0 \in \mathbb{R}$ și $h > 0$. Atunci polinomul de interpolare unic determinat $P \in \Pi_r^N$ are forma:*

$$(8.10.1) \quad P(x_r + sh) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k g_r, \quad s \in \mathbb{R},$$

unde

$$(8.10.2) \quad \binom{-s}{k} = \frac{(-s)(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!} s(s+1) \dots (s+k-1),$$

$$(8.10.3) \quad \Pi_r^N = \left\{ P(t) = \sum_{k=0}^r a_k t^k, a_k \in \mathbb{R}^N \right\},$$

$$\text{și } \nabla^k g_m = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} g_{m-j}, \quad 0 \leq k \leq m \leq r.$$

Pentru demonstrația lemei se folosește forma lui Newton a polinomului P cu diferențele divizate $a_k = [x_r, \dots, x_{r-k}; g] \in \mathbb{R}^N$, $k = 0, 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} P(x_r + sh) &= a_0 + a_1(x_r + sh - x_r) + \dots + a_r(x_r + sh - x_r) \dots (x_r + sh - x_1) = \\ &= \sum_{k=0}^r a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_r + sh - x_{r-j}) = \\ &= \sum_{k=0}^r a_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_r + sh - (x_r - jh)) = \\ &= \sum_{k=0}^r a_k h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s + j) = \sum_{k=0}^r a_k h^k (-1)^k k! \binom{-s}{k}. \end{aligned}$$

Folosind și reprezentarea diferențelor divizate obținută prin inducție

$$\begin{aligned} [x_l; g] &= g_l = \nabla^0 g_l, \quad l = 0, 1, \dots, r \\ [x_l, \dots, x_{l-k}; g] &= \frac{[x_1, \dots, x_{l-k-1}, g] - [x_l, \dots, x_{l-k}; g]}{kh} = \\ &= \frac{\nabla^{k-1} g_l - \nabla^{k-1} g_{l-1}}{((k-1)! h^{k-1}) kh} = \frac{\nabla^k g_l}{k! h^k}, \quad l = k, k+1, \dots, r \end{aligned}$$

de unde rezultă relația (8.10.1).

Lema 8.10.2. Pentru o funcție dată $g \in C^{r+1}([c, d], \mathbb{R}^N)$ și pentru o diviziune echidistantă $x_l = x_0 + lh \in [c, d]$, $l = 0, \dots, r$, fie $P \in \Pi_r^N$ polinomul de interpolare corespunzător.

Eroarea de interpolare în punctul $x_r + sh \in [c, d]$ are reprezentarea

$$(8.10.4) \quad g(x_r + sh) - P(x_r + sh) = (-1)^{r+1} \binom{-s}{r+1} F(s) h^{r+1},$$

$$F(s) = \left(g^{(r+1)}(\xi_j(s)) \right)_{j=\overline{1,N}} \in \mathbb{R}^N,$$

iar $\xi_j(s) \in [c, d]$, $j = \overline{1, N}$ sunt puncte intermediare.

Demonstrație. Din Teorema 1.4.3 se știe că

$$g_j(x_r + sh) - P_j(x_r + sh) = \frac{\omega(x_r + sh) g_j^{(r+1)}(\xi_j(s))}{(r+1)!}$$

unde $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_r)$, iar g_j și P_j sunt componente de ordin j

ale vectorilor g, P cu N componente. Folosind (8.10.2) se poate calcula

$$\begin{aligned}\omega(x_r + sh) &= \prod_{j=0}^r (x_r + sh - (x_r - jh)) = h^{r+1} \prod_{j=0}^r (s + j) = \\ &= h^{r+1} (-1)^{r+1} \binom{-s}{r+1} (r+1)!\end{aligned}$$

de unde rezultă (8.10.4).

Folosind rezultatele de mai sus, cele mai cunoscute metode multipas se deduc ușor.

Metoda Adams.

Se observă că soluția $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ a problemei cu valori inițiale $y' = f(t, y), y(a) = y_0$, verifică relația:

$$(8.10.5) \quad y(t_{l+m}) - y(t_{l+m-1}) = \int_{t_{l+m-1}}^{t_{l+m}} f(t, y(t)) dt, \quad l = 0, 1, \dots, n-m.$$

Metodele de aproximare de tip Adams se obțin prin înlocuirea funcției f cu polinoame P de interpolare convenabil alese. Dacă notăm cu u_{l+m} aproximările valorilor $y_{l+m}, l = 0, 1, \dots, n-m$, din relația (8.10.5) deducem:

$$(8.10.6) \quad u_{l+m} - u_{l+m-1} = \int_{t_{l+m-1}}^{t_{l+m}} \mathcal{P}(t) dt.$$

Astfel, dacă polinomul de interpolare \mathcal{P} se ia de forma:

$$(8.10.7) \quad \begin{cases} \mathcal{P} \in \Pi_{m-1}^N, \mathcal{P}(t_j) = f_j, j = l, l+1, \dots, l+m-1, \\ f_j := f(t_j, u_j), j = l, l+1, \dots, l+m-1, \end{cases}$$

se obține **metoda Adams-Bashfort** cu m pași, $m \geq 1$.

Reprezentarea explicită a metodei Adams-Bashfort este dată în:

Teorema 8.10.1. *Metoda Adams-Bashfort cu m pași are forma:*

$$(8.10.8) \quad u_{l+m} - u_{l+m-1} = h \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \nabla^k f_{l+m-1}, \quad l = 0, 1, \dots, n-m,$$

unde coeficienții γ_k au forma:

$$(8.10.9) \quad \gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds, \quad k = 0, 1, \dots, .$$

Coeficienții γ_k se pot calcula recursiv cu relația:

$$(8.10.10) \quad \frac{1}{k+1} \gamma_0 + \frac{1}{k} \gamma_1 + \frac{1}{k-1} \gamma_2 + \cdots + \frac{1}{2} \gamma_{k-1} + \gamma_k = 1$$

pentru $k = 0, 1, \dots$.

Demonstrație. Folosind Lema 8.10.1 cu $x_j = t_{l+j}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ și condițiile (8.10.7), avem:

$$(8.10.11) \quad \begin{aligned} \int_{t_{l+m-1}}^{t_{l+m}} \mathcal{P}(t) dt &= h \int_0^1 \mathcal{P}(t_{l+m-1} + sh) ds = \\ &= h \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds \nabla^k f_{l+m-1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă fără dificultate (8.10.8).

Pentru a schița demonstrația relației (8.10.10) se folosește funcția generatoare:

$$\begin{aligned} G(t) : &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (-t)^k \right] ds = \int_0^1 (s-t)^{-s} ds = \\ &= -\frac{1}{\ln(1-t)} (1-t)^{-s} \Big|_{s=0}^{s=1} = -\frac{t}{(1-t) \ln(1-t)}, \quad -1 < t < 1. \end{aligned}$$

Am folosit faptul că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (-t)^k$ este uniform convergentă pentru $s \in [0, 1]$ cu $-1 < t < 1$, în acest caz $\left| \binom{-s}{k} \right| \leq 1$.

Din primul și ultimul termen al șirului de egalități, rezultă:

$$(8.10.12) \quad G(t) \frac{-\ln(1-t)}{t} = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1,$$

unde, dezvoltând în serie de puteri funcția \ln și explicitând funcția $G(t)$, avem:

$$(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots \right) = 1 + t + t^2 + \dots$$

Identificând coeficienții puterilor t^0, t^1, t^2, \dots , în ambii membri ai egalității de mai sus, se obține (8.10.10).

Observația 8.10.1. Din formula (8.10.10) obținem, de exemplu, primii patru coeficienți $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ și γ_3 , astfel:

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}.$$

Cu acești coeficienți, pentru $m = 1, 2, 3, 4$, metoda Adams-Bashfort poate fi reprezentată ca metodă liniară multipas astfel:

$$\begin{aligned} m = 1 : u_{l+1} &= u_l + hf_l, \quad 0 \leq l \leq n-1; \\ m = 2 : u_{l+2} &= u_{l+1} + \frac{h}{2} (3f_{l+1} - f_l), \quad 0 \leq l \leq n-2; \\ m = 3 : u_{l+3} &= u_{l+2} + \frac{h}{12} (23f_{l+2} - 16f_{l+1} + 5f_l), \quad 0 \leq l \leq n-3; \\ m = 4 : u_{l+4} &= u_{l+3} + \frac{h}{24} (55f_{l+3} - 59f_{l+2} + 37f_{l+1} - 9f_l), \quad 0 \leq l \leq n-4. \end{aligned}$$

Se poate observa că pentru $m = 1$ se obține metoda Euler.

Proprietățile principale ale metodei Adams-Bashfort sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 8.10.2. Metoda Adams-Bashfort cu m pași este zero-stabilă, iar pentru $f \in C^m([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ metoda are ordinul de consistență $p = m$. În plus, constanta de evaluare a erorii este egală cu γ_m .

Pentru demonstrație vezi [122].

Metoda Adams-Moulton.

Definiția 8.10.1. Înlocuind în (8.10.6) $m \geq 1$, polinomul de interpolare $\mathcal{P} \in \Pi_m^N$, cu polinomul definit astfel:

$$\begin{aligned} P(t_j) &= f_j, \quad j = l, l+1, \dots, l+m, \\ f_j &= f(t_j, u_j), \quad j = l, l+1, \dots, l+m, \end{aligned}$$

se obține metoda **Adams-Moulton** cu m pași.

Similar metodei Adams-Bashfort, rezultate reprezentative ale metodei Adams-Moulton sunt prezentate de următoarea teoremă:

Teorema 8.10.3. Metoda Adams-Moulton cu m pași constă în determinarea aproximățiilor u_{l+m} cu ajutorul relațiilor:

$$(8.10.13) \quad u_{l+m} - u_{l+m-1} = h \sum_{k=0}^m \bar{\gamma}_k \nabla^k f_{l+m}, \quad l = 0, 1, \dots, n-m,$$

unde coeficienții $\bar{\gamma}_k$ sunt date de relațiile:

$$(8.10.14) \quad \bar{\gamma}_k = (-1)^k \int_{-1}^0 \binom{-s}{k} ds, \quad \text{pentru } k = 0, 1, \dots,$$

care sunt independenți de m și se pot calcula recursiv cu $\bar{\gamma}_0 = 1$ din relația:

$$(8.10.15) \quad \frac{1}{k+1} \bar{\gamma}_0 + \frac{1}{k} \bar{\gamma}_1 + \frac{1}{k-1} \bar{\gamma}_2 + \dots + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{k-1} + \bar{\gamma}_k = 0,$$

pentru $k = 1, 2, \dots$.

Observația 8.10.2. Din relația (8.10.15) se pot calcula primii patru coeficienți $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ și se obțin valorile:

$$\bar{\gamma}_0 = 1, \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{1}{2}, \quad \bar{\gamma}_2 = -\frac{1}{12}, \quad \bar{\gamma}_3 = \frac{1}{24}.$$

Pentru cazurile particulare $m = 1$, $m = 2$ sau $m = 3$, metoda Adams-Moulton are următoarea reprezentare clasică ca metodă liniară multipas:

$$\begin{aligned} m = 1 : u_{l+1} &= u_l + \frac{h}{2}(f_{l+1} + f_l), \quad 0 \leq l \leq n-1; \\ m = 2 : u_{l+2} &= u_{l+1} + \frac{h}{12}(5f_{l+2} + 8f_{l+1} - f_l), \quad 0 \leq l \leq n-2; \\ m = 3 : u_{l+3} &= u_{l+2} + \frac{h}{24}(9f_{l+3} + 19f_{l+2} - 5f_{l+1} + f_l), \quad 0 \leq l \leq n-3. \end{aligned}$$

În cazul $m = 1$, se obține cunoscuta metodă a trapezelor.

Proprietățile fundamentale ale metodei Adams-Moulton sunt prezentate în următoarea teoremă:

Teorema 8.10.4. Metoda Adams-Moulton cu m pași este zero-stabilă, iar pentru $f \in C^{m+1}([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, metoda are ordinul de consistență $p = m + 1$. Constanta de evaluare a erorii este $\bar{\gamma}_{m+1}$.

Observația 8.10.3. Avantajul metodei Adams-Moulton cu m pași față de metoda Adams-Basforth cu m pași este că prima are ordinul de convergență mai mare, dar are dezavantajul că obținerea soluției numerice $u_{l+m} \in \mathbb{R}^N$ conduce la rezolvarea unui sistem neliniar.

Metoda Nyström și metoda Milne-Simpson.

În construcția acestor metode, ideea de bază constă în faptul că ecuația diferențială $y' = f(t, y(t))$ se integrează de la t_{l+m-2} la t_{l+m} , adică:

$$y(t_{l+m}) - y(t_{l+m-2}) = \int_{t_{l+m-2}}^{t_{l+m}} f(t, y(t)) dt,$$

pentru $l = 0, 1, \dots, n-m$, iar metodele concrete se obțin prin înlocuirea funcției f cu polinoame de interpolare \mathcal{P} convenabil alese. În acest fel se obțin aproximăriile:

$$(8.10.16) \quad u_{l+m} - u_{l+m-2} = \int_{t_{l+m-2}}^{t_{l+m}} \mathcal{P}(t) dt, \quad l = 0, 1, \dots, n-m.$$

Metoda Nyström.

Definiția 8.10.2. Metoda Nyström cu m pași, $m \geq 2$, se obține dacă în relația (8.10.16) \mathcal{P} este polinomul de interpolare determinat cu condițiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\in \Pi_{m-1}^N \\ \mathcal{P}(t_j) &= f_j, \quad j = l, l+1, \dots, l+m-1, \\ f_j &= f(t_j, u_j), \quad j = l, l+1, \dots, l+m-1. \end{aligned}$$

Reprezentarea explicită a metodei Nyström se obține în mod similar cu cea a metodei Adams-Bashfort.

Teorema 8.10.5. Metoda Nyström cu m pași este dată prin relația:

$$(8.10.17) \quad u_{l+m} - u_{l+m-2} = h \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k \nabla^k f_{l+m-1}, \quad l = 0, 1, \dots, n-m,$$

unde coeficienții δ_k se calculează cu relațiile:

$$(8.10.18) \quad \delta_k = (-1)^k \int_{-1}^1 \binom{-s}{k} ds, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

De asemenea, δ_k , $k = \overline{0, m-1}$ verifică relațiile: $\delta_0 = 2$,

$$(8.10.19) \quad \frac{1}{k+1} \delta_0 + \frac{1}{k} \delta_1 + \frac{1}{k-1} \delta_2 + \dots + \frac{1}{2} \delta_{k-1} + \delta_k = 0.$$

Observația 8.10.4. Din relația (8.10.18) se pot calcula primii 5 coeficienți, obținându-se:

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \frac{1}{3}, \quad \delta_3 = \frac{1}{3}, \quad \delta_4 = \frac{29}{30}.$$

Reprezentarea metodei lui Nyström cu m pași, pentru $m = 2, m = 3$ și $m = 4$ are forma:

$$\begin{aligned} m = 2 : u_{l+2} &= u_l + 2hf_{l+1}, \quad l = 0, 1, \dots, n-2; \\ m = 3 : u_{l+3} &= u_{l+1} + \frac{h}{3} (7f_{l+2} - 2f_{l+1} + f_l), \quad l = 0, 1, \dots, n-3; \\ m = 4 : u_{l+4} &= u_{l+2} + \frac{h}{3} (8f_{l+3} - 5f_{l+2} + 4f_{l+1} - f_l), \quad l = 0, 1, \dots, n-4. \end{aligned}$$

Pentru $m = 2$ se obține formula punctului de mijloc.

Proprietățile fundamentale ale metodei Nyström sunt date în:

Teorema 8.10.6. Metoda Nyström cu m pași este zero-stabilă, iar pentru o funcție $f \in C^m([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^n)$ are ordinul de convergență $p = m$. Constanta din evaluarea erorii este $\frac{1}{2}\delta_m$.

Metoda Milne-Simpson.

Metoda Milne-Simpson cu m pași, $m \geq 2$, se obține dacă se folosește polinomul de interpolare determinat cu condițiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\in \Pi_m^N, \\ \mathcal{P}(t_j) &= f_j, \quad j = l, l+1, \dots, l+m, \\ f_j &= f(t_j, u_j), \quad j = l, l+1, \dots, l+m. \end{aligned}$$

Reprezentarea explicită a metodei Milne-Simpson este dată în următoarea teoremă:

Teorema 8.10.7. Metoda Milne-Simpson cu m pași, cu $m \geq 2$, este dată prin relațiile:

$$(8.10.20) \quad u_{l+m} - u_{l+m-2} = h \sum_{k=0}^m \bar{\delta}_k \nabla^k f_{l+m}, \quad l = 0, 1, \dots, n-m,$$

cu coeficienții:

$$(8.10.21) \quad \bar{\delta}_k = (-1)^k \int_{-2}^0 \binom{-s}{k} ds, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Acești coeficienți se pot calcula recursiv cu $\bar{\delta}_0 = 2$, $\bar{\delta}_1 = -2$ și

$$(8.10.22) \quad \frac{1}{k+1} \bar{\delta}_0 + \frac{1}{k} \bar{\delta}_1 + \frac{1}{k-1} \bar{\delta}_2 + \dots + \frac{1}{2} \bar{\delta}_{k-1} + \bar{\delta}_k = 0,$$

pentru $k = 2, 3, \dots, m$.

Observația 8.10.5. Din relația (8.10.21) se pot calcula ușor primii 5 coeficienți:

$$\bar{\delta}_0 = 2, \bar{\delta}_1 = -2, \bar{\delta}_2 = \frac{1}{3}, \bar{\delta}_3 = 0, \bar{\delta}_4 = -\frac{1}{90}.$$

Pentru $m = 2$, respectiv $m = 4$, metoda Milne-Simpson cu m pași furnizează următoarele reprezentări:

$$\begin{aligned} m = 2 : u_{l+2} &= u_l + \frac{h}{3} (f_{l+2} + 4f_{l+1} + f_l), \quad l \leq n-2; \\ m = 4 : u_{l+4} &= u_{l+2} + \frac{h}{90} (29f_{l+4} + 124f_{l+3} + 24f_{l+2} + 4f_{l+1} - f_l), \quad l \leq n-4. \end{aligned}$$

Pentru $m = 2$ se obține metoda lui Milne, care se poate asimila cu formula de integrare numerică a lui Simpson.

Teorema 8.10.8. Metoda Milne-Simpson cu m pași, pentru $m \geq 2$, este zero-stabilă, iar pentru $m = 2$ și funcția f suficient de netedă, metoda lui Milne are ordinul de consistență 4 și constanta de evaluare a erorii egală cu $-\frac{1}{180}$.

Pentru $m \geq 4$ și funcția f suficient de netedă, metoda Milne-Simpson cu m pași are ordinul de consistență $p = m + 1$, iar constanta de evaluare a erorii egală cu $\frac{1}{2}\bar{\delta}_{m+1}$.

Observația 8.10.6. În caz general, pentru un număr $k \geq 3$, se obțin metode multipas prin integrarea ecuației diferențiale $y' = f(t, y)$ de la t_{l+m-k} la t_{l+m} ,

$$y'(t_{l+m}) - y(t_{l+m-k}) = \int_{t_{l+m-k}}^{t_{l+m}} f(t, y(t)) dt, \quad l = 0, 1, \dots, n-m,$$

iar înlocuind funcția f prin polinoame convenabile de interpolare \mathcal{P} se obțin aproximăriile:

$$u_{l+m} - u_{l+m-k} = \int_{t_{l+m-k}}^{t_{l+m}} \mathcal{P}(t) dt, \quad l = 0, 1, \dots, n-m.$$

REFERINȚE

În redactarea acestui capitol am folosit lucrările [1], [54], [55], [115], [122], [123] și [141].

Capitolul 9

Metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale cu condiții la limită

9.0 Enunțul problemei

Multe probleme practice, cum ar fi calculul distribuției câmpului termic, a distribuției câmpului de deformații, sau a distribuției câmpului de tensiuni într-un corp elastic omogen și altele, conduc la probleme cu condiții la limită privind ecuațiile diferențiale sau ecuațiile cu derivate parțiale.

Un exemplu simplu de problemă la limită, pentru o ecuație diferențială ordinară de ordinul doi, are forma:

$$\begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), \quad x \in [a, b] \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{aligned}$$

unde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și funcția $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este dată, iar funcția necunoscută $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $u \in C^2[a, b]$.

În cazul ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul n , una din problemele cu condiții la limită poate fi reprezentată astfel:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad x \in [a, b] \\ \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj} u^{(j)}(a) + d_{kj} u^{(j)}(b) &= \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

unde funcția $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ și coeficienții c_{kj}, d_{kj} și $\alpha_k \in \mathbb{R}$ sunt date, iar funcția necunoscută $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este din clasa $u \in C^n[a, b]$.

Cele mai cunoscute metode de rezolvare numerică a problemelor cu condiții la limită sunt: metoda diferențelor finite și metodele variaționale (Ritz, Galerkin) cuplate cu metode de element finit.

În cele ce urmează, vom analiza un caz special de problemă cu condiții la limită și anume problema Sturm-Liouville:

$$(9.0.1) \quad Lu \equiv -u''(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$(9.0.2) \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

unde $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue date, iar α, β constante reale.

Pentru cazul particular al problemei la limită Sturm-Liouville (9.0.1) - (9.0.2), condițiile de existență și unicitatea soluției sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 9.0.1. Problema bilocală Sturm-Liouville (9.0.1) – (9.0.2) are o soluție unică $u \in C^2[a, b]$ dacă $r, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue și $r(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

O metodă de transformare a problemelor la limită în probleme cu condiții initiale este metoda tirului (de tragere).

9.1 Metoda tirului (de tragere)

Scopul acestei metode constă în reducerea problemelor cu condiții la limită la probleme cu condiții initiale, pentru care au fost prezentate metode de integrare în Capitolul 8.

Reducerea problemei cu condiții la limită (9.0.1) - (9.0.2), la o problemă cu condiții initiale, se poate face prin combinarea unor soluții particulare a acestei probleme și considerând problema cu condiții initiale:

$$(9.1.1) \quad u'' = f(x, u, u'), \quad u(a) = \alpha \quad \text{și} \quad u'(a) = s,$$

unde s este un parametru real.

Problema cu condiții initiale (9.1.1) se poate reformula astfel: se caută soluția

$$(9.1.2) \quad u(x) = u_p(x) + \alpha u_1(x) + s u_2(x), \quad \text{cu}$$

$$(9.1.3) \quad Lu_p(x) = f(x), \quad u_p(a) = u'_p(a) = 0$$

$$(9.1.4) \quad Lu_1(x) = 0, \quad u_1(a) = 1, \quad u'_1(a) = 0$$

$$(9.1.5) \quad Lu_2(x) = 0, \quad u_2(a) = 0, \quad u'_2(a) = 1,$$

impunem ca $u(b) = \beta$ de unde avem

$$(9.1.6) \quad s = \frac{1}{u_2(b)} [\beta - u_p(b) - \alpha u_1(b)].$$

Numele de metodă a tirului (de tragere) provine din următoarea interpretare: dacă problema (9.0.1) - (9.0.2) reprezintă ecuația de mișcare a unui punct material, atunci panta s a traiectoriei în $x = a$ este determinată din condiția ca traiectoria să treacă prin punctul (b, β) .

Pe lângă metodele specifice problemelor cu valori inițiale prezentate în Capitolul 8, care se pot aplica problemelor la limită transformate în probleme cu valori inițiale folosind metoda tirului (de tragere), amintim două metode de aproximare combinate cu metoda tirului (de tragere).

9.1.1 Metoda tirului (de tragere) aproximată cu metoda lui Newton

Fie problema cu condiții la limită

$$(9.1.7) \quad u'' = f(x, u, u'), \quad u|a| = \alpha, \quad u|b| = \beta.$$

Considerăm problema cu condiții inițiale corespunzătoare acesteia:

$$(9.1.8) \quad u'' = f(x, u, u'), \quad x \in [a, b], \quad u(a) = \alpha, \quad u'(a) = s,$$

a cărei soluție, pentru fiecare $s \in \mathbb{R}$, există și o notăm astfel:

$$(9.1.9) \quad u(\cdot, s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Parametrul real s va fi determinat aşa încât $u(b, s) = \beta$, și deoarece funcția $u(\cdot, s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă soluția ecuației cu condiții la limită (9.1.7), condiția $u(\cdot, s) = u(\cdot)$ este îndeplinită pe intervalul $[a, b]$.

Pentru determinarea parametrului s trebuie rezolvată o ecuație neliniară

$$(9.1.10) \quad F(s) := u(b, s) - \beta, \quad s \in \mathbb{R},$$

care poate fi rezolvată aplicând metoda lui Newton

$$(9.1.11) \quad s_{n+1} = s_n - \frac{F(s_n)}{F'(s_n)}, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Algoritmul (9.1.11) poate fi interpretat astfel: la fiecare pas n , valoarea funcției F , $F(s_n)$, este soluția unei probleme cu valori inițiale de forma (9.1.8), soluție care poate fi determinată și cu metoda unipas sau multipas din Capitolul 8.

Metoda Newton care aproximează metoda tirului (de tragere) se justifică complet prin următoarea lemă.

Lema 9.1.1. *Dacă funcția F din (9.1.10) are toate proprietățile de diferențialitate necesare în $\forall s \in \mathbb{R}$, derivata ei va fi*

$$(9.1.12) \quad F'(s) = \frac{\partial u}{\partial s}(b, s) \equiv v(s),$$

atunci soluția ecuației $F(s) = 0$ este soluția unei probleme cu valori inițiale pentru o ecuație diferențială ordinară liniară de ordinul doi, de forma:

$$(9.1.13) \quad \begin{cases} v''(x) = g_1(x, s)v(x) + g_2(x, s)v'(x), & x \in [a, b], \\ v(a) = 0, \quad v'(a) = 1, \end{cases}$$

unde

$$(9.1.14) \quad \begin{aligned} g_1(x, s) &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(x, u(x, s), \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right) \quad \text{și} \\ g_2(x, s) &= \frac{\partial f}{\partial u'} \left(x, u(x, s), \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right). \end{aligned}$$

Demonstratie. Derivând de două ori funcția v din (9.1.12) și ținând cont de notațiile din (9.1.8), (9.1.9) și (9.1.10), avem:

$$\begin{aligned} v''(x) &= \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial x^2}(x, s) = \frac{d}{ds} f \left(x, u(x, s), \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(x, u(x, s), \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right) v(x) + \frac{\partial f}{\partial u'} \left(x, u(x, s), \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right) v'(x), \end{aligned}$$

cu $x \in [a, b]$. Folosind notațiile (9.1.14) și $u(a, \cdot) \equiv \alpha \Rightarrow v(a) = 0$ și $\frac{\partial u}{\partial x}(a, s) = s' \Rightarrow v'(a) = 1$ se obține (9.1.13).

9.1.2 Metoda tirului (de tragere) aproximată cu o metodă de iterație clasică

Pentru a rezolva aceeași ecuație neliniară $F(s) = 0$, se pleacă de la iterarea de punct fix

$$(9.1.15) \quad s_{n+1} = s_n - \gamma F(s_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

cu $s_0 \in \mathbb{R}$ o valoare inițială și parametrul $\gamma > 0$, se poate demonstra că sunt îndeplinite condițiile necesare proprietății de contracție, ce garantează convergența procesului iterativ (9.1.15).

9.2 Metoda diferențelor finite pentru rezolvarea problemelor cu condiții la limită

Considerăm problema Sturm-Liouville cu condiții la limită omogene:

$$(9.2.1) \quad -u'' + ru = f, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Presupunem că această problemă admite o soluție $u \in C^4[a, b]$, $r, f \in C_{[a,b]}$, $r \geq 0$. Considerăm o partiție uniformă cu pasul h a intervalului $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$(9.2.2) \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \text{cu} \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Folosind dezvoltarea în serie Taylor a funcției $u \in C^4[a, b]$, avem:

$$(9.2.3) \quad \begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + \frac{u'(x)}{1!} h + \frac{u''(x)}{2!} h^2 + \frac{u'''(x)}{3!} h^3 + \\ &\quad + \frac{u^{(4)}(x+\theta_1 h)}{4!} h^4, \quad \theta_1 \in (0, 1) \\ u(x-h) &= u(x) - \frac{u'(x)}{1!} h + \frac{u''(x)}{2!} h^2 - \frac{u'''(x)}{3!} h^3 + \\ &\quad + \frac{u^{(4)}(x-\theta_2 h)}{4!} h^4, \quad \theta_2 \in (-1, 0) \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{1}{24} \left[u^{(4)}(x+\theta_1 h) + u^{(4)}(x-\theta_2 h) \right] h^2.$$

Derivata de ordinul doi a funcției u are următoarea expresie:

$$(9.2.4) \quad u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u^{(4)}(x+\theta h) \frac{h^2}{12},$$

cu $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$.

Dacă în (9.2.4) neglijăm termenul h^2 , problema (9.2.1) devine:

$$(9.2.5) \quad -\frac{v_{k+1} + 2v_k - v_{k-1}}{h^2} + r(x_k)v_k = f(x_k),$$

$k = 1, 2, \dots, N-1$ și $v_0 = v_N = 0$, care reprezintă un sistem de $N-1$ ecuații cu tot atâtea necunoscute.

Am notat aproximările $v_k \approx u(x_k)$, $r_k = r(x_k)$ și $f_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Reprezentarea matriceală a sistemului (9.2.5) este

$$(9.2.6) \quad \frac{1}{h^2} AV = F,$$

unde

$$(9.2.7) \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & b & a_{N-1} & \end{bmatrix},$$

cu $a_i = 2 + r_i h^2$, $i = \overline{1, N-1}$ iar $b = -1$.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)},$$

$V \in \mathbb{R}^{N-1}$, $F \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Dacă în (9.2.6) ținem seama de notația

$$v''(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}$$

și că

$$v''(x) - u''(x) = u^{(4)}(x + \theta h) \frac{h^2}{12},$$

rezultă că reprezentarea erorii produsă de metoda de integrare cu diferențe finite a problemei (9.2.1) poate fi caracterizată în următoarea teoremă.

Teorema 9.2.1. *Folosind schema cu diferențe centrate de ordinul doi din (9.2.4), în rezolvarea problemei Sturm-Liouville (9.2.1), eroarea de aproximare este dată în sistemul*

$$(9.2.8) \quad \frac{1}{h^2} AE = \frac{-h^2}{12} R,$$

unde A este matricea dată de (9.2.7), vectorul coloană $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{N-1} \end{pmatrix}$ este

eroarea $e_i = v_i - u_i$, $i = \overline{1, N-1}$, iar vectorul coloană R este

$$R = \begin{pmatrix} u^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \vdots \\ u^{(4)}(x_{N-1} + \theta_{N-1} h) \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Relația (9.2.8) rezultă din $\frac{1}{h^2} AU = F + \frac{h^2}{12} R$ și (9.2.6),

$$\text{unde } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \text{ cu } u(x_k) = u_k, k = \overline{1, N-1}.$$

Evaluarea erorii soluției aproximative obținute cu metoda diferențelor finite pentru problema (9.2.1) este prezentată în următoarea teoremă.

Teorema 9.2.2. *Soluția aproximativă, folosind metoda diferențelor, a problemei (9.2.1) $u \in C^4[a, b]$, verifică inegalitatea*

$$\max_{r \leq k \leq N} |v_k - u(x_k)| \leq \frac{(b-a)}{96} h^2 \|u^{(4)}\|_\infty.$$

Demonstrație. A se vedea [122] pag. 254.

Definiția 9.2.1. Spunem că metoda cu diferențe finite este convergentă, dacă

$$\max_{r < k \leq N-1} |v_k - u(x_k)| \rightarrow 0 \quad \text{când } h \rightarrow 0.$$

Din Teorema 9.2.2 rezultă că metoda cu diferențe pentru problema (9.2.7) este convergentă.

9.3 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale

Metodele cu diferențe folosite în aproximarea soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale sunt cele mai vechi și cele mai simple. Acestea constau în considerarea unei rețele rectangulare, din domeniul de definiție a soluției, în intersecțiile cărora se aproximează ecuația cu derivate parțiale și condițiile

limită, folosind formulele de derivare numerică. Neglijându-se resturile din formulele de derivare numerică, se obține un sistem de ecuații liniare sau neliniare, după cum ecuația cu derivate parțiale este liniară sau neliniară. Soluția acestui sistem de ecuații, numit **sistem aproximant**, este aproximarea numerică a problemei cu valori la limită în punctele rețelei.

Un studiu complet al rezolvării numerice a ecuațiilor cu derivate parțiale ar necesita parcurgerea următoarelor etape:

- a) existența și unicitatea soluției sistemului aproximant;
- b) estimarea erorii soluției aproximative, adică diferența dintre valoarea soluției exactă în punctele rețelei și valoarea aproximativă;
- c) convergența metodei, adică convergența la zero a erorii într-un punct, atunci când distanța maximă dintre punctele rețelei tinde la zero.

De asemenea, în ideea implementării acestor metode pe calculator, este important de analizat *stabilitatea numerică* a schemei, adică propagarea erorilor de calcul și influența lor asupra rezultatului.

Metoda cu diferențe are avantajul că este mai simplu de aplicat, comparativ cu metodele Ritz-Galerkin, sau cu metodele de tip element finit, dar are dezavantajul că este aplicabilă doar în cazul unor soluții cu un mare grad de regularitate, minim de clasă C^4 , iar condițiile la limită și ecuația sunt approximate distinct, ceea ce duce la estimări diferite ale erorilor din interiorul domeniului față de cele situate în vecinătatea frontierei.

Vom studia aproximarea soluțiilor diferențiale de ordinul doi liniare, unde necunoscută este o funcție de două variabile de forma $u = u(x, y)$.

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi prezintă un interes deosebit în diverse domenii cum ar fi: propagarea undelor, transmiterea căldurii, mecanica construcțiilor, vibrații etc.

Fie o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi în care funcția necunoscută depinde de două variabile independente x și y de forma:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Se observă că această ecuație este liniară în termenii de ordinul doi, dar ultimul termen poate fi liniar sau neliniar. Dacă ultimul termen F este liniar în raport cu u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y}$, ecuația de mai sus se numește **liniară**, în caz contrar se numește **cvasiliniară**.

Vom folosi (9.2.4) pentru aproximarea derivatelor de ordinul doi și similar se poate deduce aproximarea derivatei de ordinul întâi:

$$(9.3.1) \quad u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3} u'''(x + \theta h), \quad \theta \in]-1, 1[$$

sau variantele

$$(9.3.2) \quad u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2} u''(x + \theta_1 h), \quad \theta_1 \in]0, 1[,$$

$$(9.3.3) \quad u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \frac{h}{2} u''(x + \theta_2 h), \quad \theta_2 \in]-1, 0[.$$

Pentru a putea preciza ordinul de mărime a restului în formulele de derivare numerică, vom folosi simbolurile lui Landau \mathcal{O} și o . Dacă f și g sunt două funcții de variabilă reală t , vom spune că $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$, dacă $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = c > 0$ și analog $f(t) = o(g(t))$ dacă $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.

Astfel se poate deduce că resturile din formulele (9.2.4) și (9.3.1) sunt de ordin $\mathcal{O}(h^2)$, iar cele din formula (9.3.2) și (9.3.3) sunt de ordin $\mathcal{O}(h)$.

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi prezentate mai sus, se clasifică în trei tipuri: eliptic, parabolic sau hiperbolic, în domeniul ei de definiție, după cum semnul expresiei $B^2 - 4AC$ este negativ, nul sau pozitiv. Coeficienții A, B și C fiind în general funcții de x și y , ecuațiile cu derivate parțiale pot fi de tipuri diferite în diverse regiuni ale domeniului lor de definiție.

9.3.1 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic

Considerăm o problemă cu condiții la limită de tip Dirichlet pentru o ecuație cu derivate parțiale de tip eliptic, de ordinul doi, liniară, în două variabile.

Fie deci, un domeniu mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a cărui frontieră Γ este o curbă închisă continuă și fie ecuația

$$(9.3.4) \quad L(u) \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + Eu = f$$

cu condiția la limită pe frontieră Γ

$$(9.3.5) \quad u|_{\Gamma} = g$$

Presupunem că funcțiile date A, B, C, D, E, f și g sunt continue și

$$(9.3.6) \quad A > 0, \quad B > 0, \quad E \leq 0.$$

În ipotezele de mai sus rezultă că (9.3.4) este de tip eliptic.

În ipoteza că ecuația (9.3.4) cu condiția (9.3.5) are o soluție $u \in C^4(\Omega)$, putem folosi aproximările (9.2.4) și (9.3.1) pentru a obține un sistem de

ecuații a cărui soluție să reprezinte aproximății pentru problema (9.3.4)-(9.3.5). Astfel vom considera o rețea de drepte paralele cu axe de coordinate

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\y_k &= y_0 + kl, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

ale căror puncte de intersecție $N(x_i, y_k) \in \Omega$. Punctele de intersecție se numesc nodurile rețelei $(x_0, y_0) \in \Omega$, $N(x_i, y_k) \equiv N_{ik}$.

Notăm cu Ω^* mulțimea **nodurilor interioare**, care au toți vecinii în Ω și cu Γ^* mulțimea **nodurilor de frontieră** care au cel puțin un nod vecin în afara lui Ω .

Se presupune că rețeaua este suficient de fină, adică h și l sunt numere nenegative apropiate de zero, astfel că pentru oricare două noduri din Ω^* și Γ^* să existe un drum în rețea format din noduri vecine succesive.

Dacă notăm cu $\alpha = \frac{l}{h}$ și cu $u_{ik} = u(x_i, y_k)$ valoarea lui u pe un nod interior N_{ik} , ecuația (9.3.4) devine:

$$(9.3.7) \quad L(u_{ik}) \equiv L^*(u_{ik}) - r_{ik} = f_{ik}, \quad \forall N_{ik} \in \Omega^*,$$

unde L^* este operatorul care aproximează operatorul L și are forma

$$\begin{aligned}(9.3.8) \quad L^*(u_{ik}) &\equiv A_{ik} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \\&+ B_{ik} \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} + C_{ik} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + \\&+ D_{ik} \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} + E_{ik} u_{ik}.\end{aligned}$$

Restul aproximării r_{ik} este dat de

$$\begin{aligned}r_{ik} &= \frac{h^2}{12} \left[A_{ik} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta_i h, y_k) + \right. \\&+ \alpha^2 B_{ik} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_k + \tau_k l) + 2C_{ik} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i + \tilde{\theta}_i h, y_k) + \\&\left. + 2\alpha^2 D_{ik} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_k + \tilde{\tau}_k l) \right].\end{aligned}$$

Se observă ușor că operatorul L^* poate fi exprimat în patru noduri vecine interioare N_{ik} , astfel:

$$(9.3.9) \quad L^*(u_{ik}) \equiv a_{ik} u_{i+1,k} + b_{ik} u_{i-1,k} + c_{ik} u_{i,k+1} + d_{ik} u_{i,k-1} - e_{ik} u_{ik},$$

unde

$$(9.3.10) \quad \begin{aligned} a_{ik} &= \frac{A_{ik}}{h^2} + \frac{C_{ik}}{2h}, \quad b_{ik} = \frac{A_{ik}}{h^2} - \frac{C_{ik}}{2h}, \\ c_{ik} &= \frac{B_{ik}}{l^2} + \frac{D_{ik}}{2l}, \quad d_{ik} = \frac{B_{ik}}{l^2} - \frac{D_{ik}}{2l}, \\ e_{ik} &= \frac{2A_{ik}}{h^2} + \frac{2B_{ik}}{l^2} - E_{ik}. \end{aligned}$$

Estimarea restului are forma:

$$(9.3.11) \quad \begin{aligned} |r_{ik}| &\leq \frac{h^2}{12} \max_D \left\{ (A + \alpha^2 B) M_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2(|C| + \alpha^2 |D|) M_2 \right\} = \frac{h^2}{12} C_1, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \left\{ \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\} \\ M_2 &= \max \left\{ \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Din (9.3.11) rezultă că restul este de ordin $\mathcal{O}(h^2)$.

Pentru a aproxima condiția la limită (9.3.5), considerăm nodul $N_{ik} \in \Gamma^*$ și presupunem că nodul $N_{i-1,k}$ este exterior domeniului.

Fie \bar{N}_{ik} punctul de pe frontieră aflat pe orizontală ce unește nodurile $N_{i-1,k}$ și N_{ik} la o distanță $\beta_{ik} < h$ de nodul N_{ik} . Aproximarea condiției la limită (9.3.5), folosind formula creșterilor finite, are forma:

$$(9.3.12) \quad u_{ik} = g(\bar{N}_{ik}) + \tilde{r}_{ik}, \quad N_{ik} \in \Gamma^*$$

unde restul $\tilde{r}_{ik} = \beta_{ik} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + \theta_i h, y_k)$.

Se arată imediat că

$$(9.3.13) \quad |r_{ik}| \leq C_2 h,$$

unde $C_2 = M_3 \max\{1, \alpha\}$, $M_3 = \max \left\{ \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\}$.

Relația (9.3.13) ne arată că am obținut o aproximatie de ordinul $\mathcal{O}(h)$.

Dacă neglijăm resturile în formulele de aproximare a ecuației și a condiției la limită, se obțin aproximări ale valorilor soluției u_{ik} pe care le vom nota cu v_{ik} și care satisfac sistemul de ecuații:

$$(9.3.14) \quad L^*(v_{ik}) = f_{ik}, \quad \forall N_{ik} \in \Omega^*$$

$$(9.3.15) \quad v_{ik} = g(\bar{N}_{ik}), \quad N_{ik} \in \Gamma^*.$$

Sistemul (9.3.14) - (9.3.15) are numărul de ecuații și cel al necunoscutelor egal cu $N = \text{card}(\Omega^* \cup \Gamma^*)$.

Existența și unicitatea soluției sistemului (9.3.14) - (9.3.15) rezultă din principiile maximului (minimului) pentru operatori eliptici. Pentru detaliu se poate vedea [4] și [41].

Pentru **estimarea erorii** se notează $\bar{e}_{ik} = u_{ik} - v_{ik}$ în fiecare nod $N_{ik} \in \Omega^* \cup \Gamma^*$, și scăzând din ecuațiile (9.3.7), (9.3.12), respectiv ecuațiile (9.3.14), (9.3.15), se obțin pentru \bar{e}_{ik} sistemele de ecuații:

$$(9.3.16) \quad L^*(\bar{e}_{ik}) = r_{ik}, \quad \forall N_{ik} \in \Omega^*$$

$$(9.3.17) \quad \bar{e}_{ik} = r_{ik}, \quad \forall N_{ik} \in \Gamma^*.$$

9.3.2 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic

Ecuațiile cu derivate parțiale de tip hiperbolic și parabolic se mai numesc și ecuații de **evoluție**, deoarece ele conțin pe lângă variabilele spațiale și variabila independentă timpul.

Cele mai simple modele de ecuații hiperbolice sunt ecuațiile propagării undelor, iar pentru ecuațiile parabolice sunt ecuațiile propagării căldurii.

Problema rezolvării numerice a ecuațiilor de evoluție cu metoda diferențelor se tratează analog ca în cazul problemelor eliptice, dar aici se face distincție între discretizarea temporală și cea spațială, iar schemele cu diferențe pot fi explicite sau implicate, în funcție de nivelele de timp.

De asemenea, ca o particularitate în aproximarea ecuațiilor de evoluție, este importantă propagarea erorilor de rotunjire de la un nivel de timp la altul, ceea ce poate afecta rezultatul, în cazul unui număr mare de intervale de timp.

Vom ilustra metoda diferențelor pentru problemele cu condiții la limită privind ecuațiile de tip parabolic sau hiperbolic liniare, cu o variabilă spațială și una temporală.

Considerăm ecuația hiperbolică de forma:

$$(9.3.18) \quad Lu \equiv A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x^2} - B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + G(x, t)u = f(x, t)$$

unde funcția necunoscută $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$ și

$$(9.3.19) \quad A(x, t) \geq 0, \quad B(x, t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

Problemele cu condiții la limită sau cu condiții initiale relative la ecuația (9.3.18) pot fi:

a) problema Cauchy care are forma

$$(9.3.20) \quad \begin{aligned} Lu &= f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

b) problemele mixte

$$(9.3.22a) \quad \begin{cases} Lu = f, \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = \phi_1(t), \quad u(b, t) = \phi_2(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

sau

$$(9.3.22b) \quad \begin{cases} Lu = f \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad a \leq x \leq b \\ \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) + \beta_1(t)u(a, t) = g_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(b, t) + \beta_2(t)u(b, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

cu $f, \varphi, \psi, \phi_1, \phi_2, \beta_1, \beta_2, g_1, g_2$ funcții cunoscute.

9.3.2.1 Scheme cu diferențe pentru problema Cauchy

Considerăm rețeaua de drepte paralele cu axa OX

$$x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad h > 0$$

și cu axa timpului

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau > 0.$$

Folosind formulele de derivare numerică din paragraful 9.3.1 și presupunând că problema (9.3.20) are o soluție $u \in C^{(4)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= u(x_i, t_j), \quad A_{ij} = A(x_i, t_j), \quad B_{ij} = B(x_i, t_j), \quad C_{ij} = C(x_i, t_j), \\ D_{ij} &= D(x_i, t_j), \quad G_{ij} = G(x_i, t_j), \end{aligned}$$

obținem pentru $j \geq 1$ următoarea relație:

$$(9.3.23) \quad \begin{aligned} Lu_{ij} &\equiv A_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - B_{ij} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + \\ &+ C_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + D_{ij} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\tau} + \\ &+ G_{ij}u_{ij} - r_{ij} = f_{ij}, \end{aligned}$$

unde restul r_{ij} verifică

$$(9.3.24) \quad |r_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} \left\{ (A_{ij} + \alpha^2 B_{ij}) M_3 + 2(|C_{ij}| + \alpha^2 |D_{ij}|) M_4 \right\}.$$

În (9.3.24) am notat $\alpha = \frac{\tau}{h}$ și

$$\begin{aligned} M_3 &= \max_{\Omega} \left\{ \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right| \right\} \\ M_4 &= \max_{\Omega} \left\{ \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Ecuația discretizată la fiecare pas de timp t_j cu $j \geq 1$ are forma:

$$(9.3.25) \quad L^* u_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$$

unde operatorul L^*u are expresia

$$(9.3.26) \quad L^* u_{ij} = a_{ij}u_{i,j+1} + b_{ij}u_{i,j-1} + c_{ij}u_{i+1,j} + d_{ij}u_{i-1,j} + e_{ij}u_{ij},$$

cu notațiile

$$(9.3.27) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= -\frac{B_{ij}}{\tau^2} + \frac{D_{ij}}{2\tau}, \quad b_{ij} = -\frac{B_{ij}}{\tau^2} - \frac{D_{ij}}{2\tau}, \quad c_{ij} = \frac{A_{ij}}{h^2} + \frac{C_{ij}}{2h}, \\ d_{ij} &= \frac{A_{ij}}{h^2} - \frac{C_{ij}}{2h}, \quad e_{ij} = -\frac{2A_{ij}}{h^2} + \frac{2B_{ij}}{\tau^2} + G_{ij}. \end{aligned}$$

Pentru aproximarea condițiilor inițiale din problema Cauchy avem:

$$(9.3.28) \quad u_{i0} = \varphi_i$$

unde $\varphi_i = \varphi(x_i)$ și

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_{i,0}) = \frac{u_{i1} - u_{i0}}{\tau} - \bar{r}_{i0},$$

unde restul \bar{r}_{i0} verifică relația

$$(9.3.29) \quad \max_{\Omega} \left\{ \sup \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \sup \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}.$$

Astfel că vom obține:

$$(9.3.30) \quad \begin{cases} u_{i0} = \varphi_i \\ u_{i1} = \varphi_i + \tau\psi_i + \tau\bar{r}_{i0}. \end{cases}$$

O aproximare mai bună a condițiilor initiale se obține dacă considerăm un pas de timp fictiv, $t_{-1} = -\tau$, obținându-se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2\tau} - \tilde{r}_{i0},$$

unde restul \bar{r}_{i0} verifică relația $|\bar{r}_{i0}| \leq \frac{\tau^2}{\tau} \max_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \right\}$.

Neglijând resturile, aproximările v_{ij} ale soluției în nodurile interioare ale rețelei, vor satisface **sistemul aproximant**:

$$(9.3.31) \quad a_{ij}v_{i,j+1} + b_{ij}v_{i,j-1} + c_{ij}v_{i+1,j} + d_{ij}v_{i-1,j} + e_{ij}v_{ij} = f_i,$$

pentru $j \geq 1$.

Din condițiile (9.3.19) și presupunând că pasul în timp τ este suficient de mic, se observă că:

$$a_{ij} = \frac{-2B_{ij} + \tau D_{ij}}{2\tau^2} < 0,$$

fapt care permite explicitarea aproximării $v_{i,j+1}$ de la nivelul de timp t_{j+1} , în funcție de valorile aproximărilor anterioare de la nivelele t_{j-1} și t_j .

Cu această observație, soluția sistemului aproximant (9.3.31) se obține sub forma diferențelor explicite:

$$(9.3.32) \quad v_{i,j+1} = \frac{f_{ij}}{a_{ij}} - \frac{b_{ij}}{a_{ij}} v_{i,j-1} - \frac{c_{ij}}{a_{ij}} v_{i+1,j} - \frac{d_{ij}}{a_{ij}} v_{i-1,j} - \frac{e_{ij}}{a_{ij}} v_{ij},$$

împreună cu condițiile initiale

$$(9.3.33) \quad \begin{aligned} v_{i0} &= \varphi_i \\ v_{i1} &= \varphi_i + \tau\psi_i. \end{aligned}$$

În procesul de **evaluare a erorii**, vom nota erorile $\bar{e}_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$ și scăzând relațiile (9.3.25) și (9.3.31) se obțin formulele explice de recurență pentru erori:

$$(9.3.34) \quad \begin{aligned} \bar{e}_{i,j+1} &= \frac{r_{ij}}{a_{ij}} - \frac{b_{ij}}{a_{ij}} \bar{e}_{i,j-1} - \frac{c_{ij}}{a_{ij}} \bar{e}_{i+1,j} - \frac{d_{ij}}{a_{ij}} \bar{e}_{i-1,j} - \\ &\quad - \frac{e_{ij}}{a_{ij}} \bar{e}_{ij}, \quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\bar{e}_{i0} &= 0 \\ \bar{e}_{i1} &= \tau \bar{r}_{i0}.\end{aligned}$$

Folosind estimările resturilor se pot găsi estimări pentru erorile \bar{e}_{ij} . În cazul ecuației undelor unidimensionale cu $\tau = h$, erorile \bar{e}_{ij} sunt de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$.

9.3.2.2 Scheme cu diferențe pentru problema mixtă

Pentru rezolvarea numerică cu schema diferențelor finite a problemei mixte (9.3.22b), procedăm ca în cazul problemei Cauchy. Discretizăm variabila spațială pe intervalul $[a, b]$:

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq N, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

și se obține soluția sistemului aproximant cu diferențe explicite:

$$\begin{aligned}(9.3.35) \quad v_{i,j+1} &= \frac{f_{ij}}{a_{ij}} - \frac{b_{ij}}{a_{ij}} v_{i,j-1} - \frac{c_{ij}}{a_{ij}} v_{i+1,j} - \\ &\quad - \frac{d_{ij}}{a_{ij}} v_{i-1,j} - \frac{e_{ij}}{a_{ij}} v_{ij}, \quad (1 \leq i \leq N-1, j \geq 1) \\ v_{0j} &= \phi_{1j}, \quad v_{Nj} = \phi_{2j}, \quad (1 \leq j) \\ v_{i0} &= \varphi_i, \quad v_{i1} = \varphi_i + \tau \psi_i, \quad (0 \leq i \leq N).\end{aligned}$$

Pentru estimarea erorii se procedează ca în cazul problemei Cauchy prin formule de recurență explicite.

9.3.3 Metode cu diferențe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic

Vom analiza ecuația parabolică

$$\begin{aligned}(9.3.36) \quad Lu &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} - A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t)u = \\ &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

cu necunoscuta $u = u(x, t)$ depinzând de o variabilă spațială x și de una temporală $t \geq 0$ și considerăm că este îndeplinită condiția

$$(9.3.37) \quad A(x, t) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Problema cu valori inițiale, adică problema Cauchy pe axa reală este de forma:

$$(9.3.38) \quad Lu = f, \quad u(x, 0) = g(x).$$

Pentru rezolvarea numerică cu metoda diferențelor a problemei (9.3.38), vom discretiza variabilele x și t ca în cazul problemelor hiperbolice și vom avea următoarele formule de derivare numerică în raport cu x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_k) &= \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_i, t_k) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{\xi}_i, t_k). \end{aligned}$$

Pentru derivata în raport cu timpul se pot folosi trei variante de aproximare a derivatei:

$$(9.3.39) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tau_k)$$

$$(9.3.40) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\tau}_k)$$

$$(9.3.41) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2\tau} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \tilde{\tau}_k),$$

rezultând trei variante de aproximare a operatorului L :

$$(9.3.42) \quad L_1^*(u_{ik}) = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} - A_{ik} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \\ + B_{ik} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + C_{ik} u_{ik}$$

$$(9.3.43) \quad L_2^*(u_{ik}) = \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\tau} - A_{ik} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \\ + B_{ik} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + C_{ik} u_{ik}$$

$$(9.3.44) \quad L_3^*(u_{ik}) = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2\tau} - A_{ik} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \\ + B_{ik} \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + C_{ik} u_{ik}.$$

Din neglijarea restului, se obțin trei variante de sisteme aproximante:

$$(9.3.45) \quad L_j^*(v_{ik}) = f_{ik}^j, \quad j = 1, 2, 3,$$

la care se adaugă valorile inițiale

$$(9.3.46) \quad v_{i0} = g_i.$$

Datorită erorii de trunchere diferită în cele trei cazuri, erorile de aproximare a soluției sunt de ordinul $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$ pentru primele două variante și de ordinul $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$ pentru varianta a treia.

Prima și a treia schemă ($j = 1$ și $j = 3$ în (9.3.45)) sunt scheme explicite, iar varianta a doua este o schemă implicită, $j = 2$ în (9.3.45).

O problemă mixtă, cu valori la limită și inițiale, pentru o ecuație cu derivate parțiale de tip parabolic, are forma

$$(9.3.47) \quad \begin{aligned} Lu &= f & x \in [a, b] \\ u(x, 0) &= g(x) \\ \beta_1(t) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \gamma_1(t)u(a, t) &= \varphi_1(x) \\ \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \gamma_2(t) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= \varphi_2(x) \end{aligned}$$

unde funcțiile $f, g, \varphi_1, \varphi_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ și γ_2 sunt cunoscute. Aproximările cu diferențe finite se fac similar ca în cazurile anterioare.

Așa cum am precizat la începutul paragrafului 9.3.2, schemele cu diferențe pentru ecuațiile de evoluție pot fi stabile sau instabile. Pentru ca pașii h și τ să fie mici, numărul de noduri în care se aproximează soluția trebuie să fie mare, volumul de calcul va fi mare și poate fi afectat de erori de calcul.

Există scheme cu diferențe, pentru care eroarea de calcul făcută la un anumit nivel de timp să fie amplificată cu înaintarea în timp și scheme cu diferențe pentru care aceste erori să se micșoreze în timp.

Pentru un studiu sistematic e nevoie de a da definiția de stabilitate (vezi [124]).

Definiția 9.3.1. Spunem că o schemă cu diferențe este **stabilă**, dacă eroarea cumulată este mărginită, adică dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, independent de pașii h și τ , astfel încât, dacă notăm cu \bar{e}_{ik} erorile de calcul în nodul anterior (x_i, t_k) și $\sum_{i=0}^{N-1} \bar{e}_{i0}^2 < \delta$, să avem $\sum_{i=1}^{N-1} \bar{e}_{ik}^2 < \varepsilon$, $\forall k \geq 1$. Dacă cantitatea $\sum_{i=1}^{N-1} \bar{e}_{ik}^2$ devine oricât de mare, spunem că schema este **instabilă**.

O exemplificare simplă a acestui fenomen este aplicarea schemei cu diferențe, corespunzătoare unei ecuații parabolice omogene, neținând cont de condițiile la limită.

Fie ecuația

$$(9.3.48) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

căreia îi aplicăm cele 3 scheme (9.3.45) pentru $j = 1, 2$ și 3 . Notăm cu $\alpha = \tau/h^2$ și obținem sistemele aproximante:

$$(9.3.49) \quad \begin{aligned} v_{i,k+1} &= (1 - 2\alpha)v_{ik} + \alpha(v_{i+1,k} + v_{i-1,k}) \\ (1 + 2\alpha)v_{ik} - \alpha(v_{i+1,k} + v_{i-1,k}) &= v_{i,k-1} \\ v_{i,k+1} &= 2\alpha(v_{i+1,k} - 2v_{ik} + v_{i-1,k}) + v_{i,k-1}. \end{aligned}$$

Dacă în prima schemă din (9.3.49) luăm $\alpha = 1/2$, rezultă $v_{i,k+1} = (v_{i+1,k} + v_{i-1,k})/2$. Analizând în acest caz erorile $\bar{e}_{ik} = u_{ik} - v_{ik}$, se poate observa că erorile scad de la un nivel de timp la altul, și tendința de micșorare a erorii către zero pentru $t \rightarrow \infty$.

Dacă analizăm a treia schemă din (9.3.49) cu $\alpha = 1/2$, care devine $v_{i,k+1} = v_{i+1,k} - 2v_{ik} + v_{i-1,k} + v_{i,k-1}$, se va observa o creștere rapidă a erorii.

Se poate concluziona (vezi [4] și [124]) că:

- a) prima schemă cu diferențe din (9.3.49) este **stabilă** pentru $\alpha \leq 1/2$ și **instabilă** pentru $\alpha > 1/2$, adică condiționat și stabilă;
- b) a doua schemă cu diferențe din (9.3.49) este **necondiționat stabilă**;
- c) a treia schemă cu diferențe din (9.3.49) este **instabilă** pentru orice valoare α .

REFERINȚE

În redactarea acestui capitol am folosit lucrările [1], [4], [55], [81], [122], [123] și [124].

Bibliografie

- [1] Agratini, O., Chiorean, I., Coman, Gh., Trîmbițaș, R., *Analiza numerică și teoria aproximării*, vol.III, Presa Universitară Clujeană, (2002).
- [2] Altman, M., *Concerning Tchebyshev's Generalized Method of solving nonlinear functional Equations*, Bull. de l'Acad. Polonaise de Sciences (Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques) vol. IX (4), 261-266, (1961).
- [3] Altman, M., *Iterative Methos of Higher Order*, Bull. de l'Acad. Polonaise de Sciences (Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques), vol. IX (2), 63-68, (1961).
- [4] Aniculăesei Gh., Ilio C-tin, *Ecuății cu derivate parțiale și aproximare numerică*, Editura Universității "Alexandru Ioan Cuza", Iași, 2005.
- [5] Argyros, I.K., and Chen, D., *A note on the Halley method in Banach spaces*, Appl. Math. Comp., 58, 215-224, (1993).
- [6] Argyros, I.K., *Chebysheff-Halley-like methods in Banach spaces*, Korean J. Comp. Appl. Math. 4, 1 83-107, (1997).
- [7] Argyros, I.K., *Error bounds for the modified secant method*, BIT, 20, 92-200, (1990).
- [8] Argyros, I.K., *Improved error bounds for a certain class of Newton-like methods*, J. Approx. Th. and Its Applic. 61 (1990), 80-98
- [9] Argyros, I.K., *Improving the order and rates of convergence for the Super-Halley method in Banach spaces*, Comp. Appl. Math. 5, 2 (1998), 465-474.
- [10] Argyros, I.K., *Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis*, Bull. Austral. Math. Soc. 37, 131-147, (1987).

- [11] Argyros, I.K., *On Newton's method and nondiscrete mathematical induction*, Bull. Austral. Math. Soc. 38, 131-140, (1988),.
- [12] Argyros, I.K., *On polynomial equations in Banach space, perturbation techniques and applications*, Intern. J. Math. and Math. Sci. 10, 1, 69-78, (1987).
- [13] Argyros, I.K., *On the convergence of a Chebysheff-Halley-type method under Newton-Kantorovich hypothesis*, Appl. Math. Letters 6, 5, 71-74, (1993).
- [14] Argyros, I.K., *On the method of tangent hyperbolas*, J. Appr. Th. Appl. 12, 1, 78-96, (1996).
- [15] Argyros, I.K., *On the Secant method and fixed points of nonlinear equations*, Monatshefte für Mathematik, 106, 85-94, (1988).
- [16] Argyros, I.K., *Polynomial Operator Equations in Abstract Spaces and Applications*, CRC Press. Boca Raton, Boston London New York, Washington, D. K., 2000.
- [17] Ascher, U.M., Mattheij R.M.M. and Russel R.D., *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1988.
- [18] Babici, D. M. și Ivanov, V.V., *Oțenka polnoi progresnosti pri rešenija nelineinîh operatornîh uravnenii metodov prostoi iteračii*, Journal výcisletelinoi matematiki i matematicheskoi fiziki, 7, 5, 988-1000 (1967).
- [19] Bachmann, K.N., *Der Konvergenzgrad bei Iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation*, Z.A.M.M., 34, 282-283 (1954).
- [20] Bairon Karol and Matkowski, J., *A fixed point theorem for nonexpansive mappings on Compact metric spaces*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, Tom 15, (29), 25-26, (1973).
- [21] Balasz, M. și Goldner, G., *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda parabolelor tangente*, Studii și cercetări matematice, 20, 6, 801-807, (1968).
- [22] Balasz, M., *Asupra metodei coardei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare*, Studii și cercetări matematice, 20, 2, 129-136 (1968).

- [23] Balázs, M., *A bilateral approximating method for finding the real roots of real equations*, Rev. Anal. Numér. et Théor. Approx., (21), **2** 111-117, (1992).
- [24] Barnes, J.G.P., *An algorithm for solving nonlinear equations bazed on the secant method*, Comput. J., 66-72, (1965).
- [25] Belman, R., Kalaba, R., *Quasilinearisation and Nonlinear Boundary-Value Problems*, American Elsevier Publishing Company inc., New-York (1965).
- [26] Ben-Israel, A., *Newton's Method with Modified Functions*, Contemporary Mathematics, **204**, 39—50, (1997).
- [27] Berezin, I. S., Jidkov, N.P., *Metodî vîcislenii*, Grosud, izd. fiz. mat. lit., Moskva, vol. I, II, (1962).
- [28] Berinde, V., *Iterative Approximation of Fixed Points*, Ed. Efemeride, Baia-Mare, (2002).
- [29] Brent, R., Winograd, S., Wolfe, Ph., *Optimal Iterative Processes for root-finding*, Numer. Math. **20**, 5, 327-341, 1973.
- [30] Brown, G.H., Jr., *On Halley's Variation of Newton's Method*, Amer. Math. Monthly, **84**, 726—728, (1977).
- [31] Candela V. and Marquina A., *Recurrence Relations for Rational Cubic Methods I: The Halley's Method*, Computing, **44**, 169—184, (1990).
- [32] Cassuli, V., Trigiante, D., *The convergence for iterative multipoint procedures*, Calcolo, (13), **1** 25-44, (1977).
- [33] Cătinaş, E., *Affine Invariant Conditions for the Inexact Perturbed Newton Method*, Rev. Anal. Numér. Theor. Approx., **31**, 1, 17-20, (2002)
- [34] Cătinaş, E., *Inexact Perturbed Newton Methods and Applications to Class of Krylov Solved*, J. Optim. Theory Appl., **108**, 3, 543-570, (2001).
- [35] Cătinaş, E., *On accelerating the convergence of the successive approximations method*, Rev. Anal. Numér. Theor. Approx., **29**, 1, 3-8, (2001).
- [36] Cătinaş, E., *On the High convergence Orders of the Newton-GMBACK Methods*, Rev. Anal. Numér. Theor. Approx., 28, Nr.2, 125-132, (1999).
- [37] Cătinaş, E., *On the Superlinear convergence of the Succesive Approximation Methods*, J. Optim Theory Appl., **113**, 3, 473-485, (2002).

- [38] Cătinaș, E., *The Inexact, Inexact Perturbed and Quasi-Newton Methods are Equivalent Models*, Math. Comp., **74**, 249, 291-301, (2005).
- [39] Cobzaș, Șt., *Analiza matematică (calcul diferențial)*, Presa Universitară Clujeană, (1997).
- [40] Collatz, L., *Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in praktischen Analysis*, Z. Angew. Math. Phys., 4, 327-351, (1953).
- [41] Collatz, L., *Functional Analysis and Numerisch Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1964).
- [42] Coman, Gh., *Analiză numerică*, Ed. Libris, Cluj-Napoca, 1995.
- [43] Coman, Gh., Pavel, G., Rus, I. și Rus, A.I., *Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale*, Ed. Dacia, Cluj, 1976.
- [44] Demidovici, B.P., Maron, I.A., *Osnovî vîcislitelinoi matematiki*, Gosud. izd. fiz.-mat.-lit., Moskva, (1960).
- [45] Demidovici, B.P., Maron, I.A., Suvalova, A.A., *Cislenie metodî analiza*, Gosud. izd. fiz. mat. lit., Moskva, (1952).
- [46] Dennis, J.E., *On Newton's method and nonlinear simultaneous displacement*, SIAM J. Numer. Anal., 4, 103-108, (1967).
- [47] Dennis, J.E., *On Newton-like methods*, Numer. Math., 11, 324-330 (1968).
- [48] Deslauries, G. and Dubuc, S., *Le calcul de la racine cubique selon Héron*, Elemente der Mathematik, **51**, 28—34, (1996).
- [49] Ford, W.F. and Pennline, J.A., *Accelerated Convergence in Newton Method*, SIAM Rev., **38**, 658-659, (1996).
- [50] Fujii, M., *Remarks to Accelerated Iterative Processes for Numerical Solution of Equations*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I., 27, 97-18 (1963).
- [51] Gerlach, J., *Accelerated Convergence in Newton's Method*, SIAM Rev., **36**, 272-276, (1994).
- [52] Ghinea, M., *Sur la resolution des équations opérationnelles dans les espaces de Banach*, Revue Française de Traitement de l'Information, 8, pp. 3-22 (1965).

- [53] Goldstein, A.A., *On Newton's Method*, Numerische Mathematik, 7, pp. 391-393 (1965).
- [54] Grigore, Gh., *Lecții de analiză numerică*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1990.
- [55] Iacob, C., Homentcovschi, D., Marcov, N., Nicolau, A., *Matematici clasice și moderne*, vol. IV, Editura Tehnică, București, 1984.
- [56] Iancu, C. Păvăloiu, I., *Résolution des équations à l'aide des fonctions rationnelles d'interpolation inverse*, Preprint nr.1, 71-78, Seminar on functional analysis and numerical methods, (1985).
- [57] Iancu, C., Păvăloiu, I., *La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite*, Mathematica (Cluj), 26 (49), N 2, 115-123, (1984).
- [58] Iancu, C., Păvăloiu, I., Ţerb, I., *Méthodes itératives optimales de type Steffensen obtenues par interpolation inversée*. Preprint nr.1, Seminar on functional analysis and numerical methods, 81-88, (1983).
- [59] Ionescu, V. D., *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, București, (1957).
- [60] Ionescu, V.D., *Diferențe Divizate*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, (1978).
- [61] Istrățescu, I.V., *Introducere în teoria punctelor fixe*, București, Editura Academiei Republicii Socialiste România, (1973).
- [62] Janko, B. și Goldner, G., *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale prin metoda lui Cebîșev (II)*, Studia Universitatis Babeș-Bolyai 2, 981-990, (1968).
- [63] Janko, B., *Asupra metodei generalizate a lui Cebîșev I*, Studii și cercet. mat. (Cluj) XII, 2, 87-91, (1962).
- [64] Janko, B., *Asupra metodei generalizate a lui Cebîșev II*, Studii și cercet. mat. (Cluj) XIV, 1, 57-62, (1963).
- [65] Janko, B., *Asupra metodelor generale iterative de ordinul k*, Studii și cercet. mat., (Cluj), XIV, 1, 63-71 (1963).
- [66] Janko, B., *Rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach*, București, Editura Academiei R. S. România, (1969).

- [67] Janko, B., *Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles nonlinéaires*, I. Magy. Tud. Acad. Mat. Kutato Intézed Közleményei, VI, ser. A., 3, 301-311, (1961).
- [68] Kacewicz, B., *An Integral-Interpolation Iterative Method for the Solution of Scalar Equations*, Numer. Math. **26**, 4, 355-365, (1976).
- [69] Kantorovich, L.V., Akilov, G. P., *Functional analysis in normed linear spaces*, Pergamon Press, New York, 1959.
- [70] Kantorovici, L.V., *O metodî Niutona*, Trudî Mat. Inst. V.A. Sreklova, 28, 104-144, (1949).
- [71] Kantorovici, V.A., *Functionalnîi analiz i prikladnaia matematika*, U.M.N.. III, 6, (28), 89-185 (1948).
- [72] Karpilowskaia, B.E., *O shodimosti interpoliaționnogo metoda dlja obîknovennîh differențial'nîh uravnenii.*, U.M.N., T. VIII, vîp. 3, (55), 111-118, (1953).
- [73] Kenneth, B., and Dennis, E.J., *On Newton-like Iteration Functions: General Convergence Theorems and a specific Algorithm*, Numerische Mathematic 12, 186-191, (1968).
- [74] Khen, Kuo-Vang., *Generalisation of Steffensen's method for operator equations*, Comment. Mat. Univ. Caroline, 5, 47-77, (1964).
- [75] Kress, R., *Numerical analysis*, 1st ed., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [76] Kryloff, N., (Krîlov), *Sur différents procédés d'intégration approchée*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Sciences Mathématiques et Physiques, Tom 19, 167-199, (1927).
- [77] Lancaster, P., *Error for the Newton-Raphson Method*, Numerische Mathematik, 9, 1, 55-68, (1966).
- [78] Lozinski, M.S., *Obratnîe funcții, neiavnîe funcții i resenie uravnenii.*, Vestnik. Leningrad. Univ., nr.7, vîp.2, 131-142 (1957).
- [79] Luca, D. and Păvăloiu, I., *On the Heron's Method for the Approximation of the Cubic Root of a Real Number*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **26**, Nr. 1-2, 103—108, (1997).
- [80] Marinescu, G., *Analiza Numerică*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1974.

- [81] Martin, O., *Probleme de analiză numerică*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 1998.
- [82] Măruşter, Şt., *Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor nelineare*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1981.
- [83] Melman, A., *Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods*, SIAM Rev., 39, 728-735, (1997).
- [84] Năstăsescu, C., Niță, C., *Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.
- [85] Natanson, J.P., *Konstruktivnaia teoria funcții*, Gostehizdat, 1951.
- [86] Necepurenko, I.M., *O metode Cebîseva dlja functionalnih uravnenii*, Uspehi Matematicheskikh Nauk., T. IX, vîp. 2, (60), 163-170, (1954).
- [87] Ortega, J. and Rheinboldt, W., *Monotone iteration for nonlinear equations with applications to Gauss Seidel methods*, SIAM J. on Numer. Anal. 4, 171-1190, (1967).
- [88] Ostrowski, A. M., *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New York and London, 1960.
- [89] Ostrowski, A., *Konvergenzdiskussion und Fehlerabschätzung für die Newtonische Methode bei Gleichungssystemen*, Comentarii Mathematici Helvetici, vol.9, 79-103, (1937).
- [90] Ostrowski, A., *Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonischen Verfahren*, Mathematiceskii sbornic, T. 2, 44, nr. 6, 1073-1095, (1937).
- [91] Ostrowski, A.M., *The Round of Stability of Iterations*, Z.A.M.M., 47, 77-81, (1967).
- [92] Păvăloiu, I. Ţerb, I., *Sur des méthodes itératives de type intérpolatoire à vitesse de convergence optimale*, Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation, 12, 1, 83-88, (1983).
- [93] Păvăloiu, I. Ţerb, I., *Sur des méthodes itératives optimales*, Preprint nr.1, 175-182. Seminar on functional analysis and numerical methods, (1983).
- [94] Păvăloiu, I., *A Convergency Theorem Concerning the Chord Method*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., Tome 22, nr.1, 83-85, (1993).

- [95] Păvăloiu, I., *A Halley-Aitken-Type Method for Approximating the Solutions of Scalar Equations*, Bull. Științ. Univ. de Nord Baia Mare, vol. 27, Nr.1-2, (2001).
- [96] Păvăloiu, I., *A note on the efficiency index of a class of two step Hermite iterative methods*, Conferences in Analysis, Functional Equations Approximation and Convexity, in Honour of Professor ELENA POPOVICIU, Cluj-Napoca, 228-233, (1999).
- [97] Păvăloiu, I., *Aitken-Steffensen-type methods for nonsmooth functions (I)*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 31 no.1, 111-116, (2002).
- [98] Păvăloiu, I., *Aitken-Steffensen-type methods for nonsmooth functions (II)*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 31 no.2, 191-196, (2002).
- [99] Păvăloiu, I., *Approximation of the Roots of Equations by Aitken-Steffensen-Type Monotonic Sequences*, CALCOLO, vol.32, No. 1-2, 69-82, 1995.
- [100] Păvăloiu, I., *Bilateral Approximations for the Solutions of Scalar Equations*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., Tome 23, nr.1, 95-100, (1994).
- [101] Păvăloiu, I., Cătinaș, E., *Remarks on Some Newton and Chebyshev-type Methods for Approximating the Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices*, Computer Science Journal of Moldova, vol.7, No.1, (19), 3-17, (1999).
- [102] Păvăloiu, I., *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*, Ed. Dacia, 1976.
- [103] Păvăloiu, I., *La résolution des équations par interpolation*, Mathématica, 23, (46), 1, 61-72, (1981).
- [104] Păvăloiu, I., *On a Halley-Steffensen Method for Approximating the Solutions of Scalar Equations*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 30 no.1, 69-74, (2001).
- [105] Păvăloiu, I., *On Computational Complexity in Solving Equations by Interpolation Methods.*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., Tome 24, nr.1, 201-214, (1995).
- [106] Păvăloiu, I., *On Computational Complexity in Solving Equations by Steffensen Type Methods*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., Tome 24, nr.2, 215-220, (1995).

- [107] Păvăloiu, I., *On the Chord Method*. Buletinul științific al Universității din Baia Mare, Seria B. vol.VIII, Fasc. Mat.-Fiz. 61-66, (1991).
- [108] Păvăloiu, I., *On the Convergence Order of the Multistep Methods*, Bul. St. Univ. Baia Mare, Ser. Mat.-Inf. vol.XIII, 59-64, (1997).
- [109] Păvăloiu, I., *On the Convergency of a Steffensen - Type Method. Research Seminars*, Seminar of Mathematical Analysis. Preprint nr.7, 121-126, (1991).
- [110] Păvăloiu, I., *On the Efficiency of the Computations for Approximating the Solutions of Equations*, Bul. Stiinț. Univ. Baia Mare Ser.B Mat.-Inf., Vol.XIV Nr.1, 59-64, (1998).
- [111] Păvăloiu, I., *On the Monotonicity of the Sequences of Approximations Obtained by Steffensen's Method*, Mathematica, Tome 35(58), nr.1, 71-76, (1993).
- [112] Păvăloiu, I., *Optimal algorithms concerning the solving of equations by interpolation*, Research on Theory of Allure, Approximation, Convexity and Optimization, Ed. SRIMA, Cluj-Napoca (1999), 222-248.
- [113] Păvăloiu, I., *Optimal Efficiency Indexes for Iterative Methods of Interpolatory-type*, Computer Science Journal of Moldova, vol.5, No. 1(13), 20-43, (1997).
- [114] Păvăloiu, I., *Optimal Problems Concerning Interpolation Methods of Solution of Equations*. Publications de L'Institut Mathématique (Nouvelle série) Beograd, Tome 52 (66), 113-126, (1992).
- [115] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, 1981.
- [116] Păvăloiu, I., *Sur l'estimation des erreurs en convergence numérique de certaines méthodes d'itération*, Preprint nr.1, 133-136, Seminar on functional analysis and numerical methods, (1986).
- [117] Păvăloiu, I., *Sur l'ordre de convergence des méthodes d'itération*, Mathematica, 23, (46), 1, 261-272, (1981).
- [118] Păvăloiu, I., *Sur une généralisation de la méthode de Steffensen, Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation*, Tome 21, nr.1, 59-67, (1992).
- [119] Păvăloiu, I., *Sur une méthode de type Steffensen utilisée pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires*. Preprint nr.1, 105-110, Seminar on functional analysis and numerical methods, (1989).

- [120] Păvăloiu, I., *Un algorithme de calcul dans la résolution des équations par interpolation*. Preprint nr.1, 130-134, Seminar on functional analysis and numerical methods, (1987).
- [121] Pham, D. et Ghinea, M., *Sur une méthode d'itération dans la théorie des équations*, C. R. Acad. Sci. Paris 240, 2162-2264, (1959).
- [122] Plato, R., *Concise Numerical Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.
- [123] Pop, N., *Metode de calcul numeric*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2002.
- [124] Pop, N., *Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale*, Editura Cub Press.22, Baia-Mare, 1998.
- [125] Popov, M.B., *Sur un procédé de résolution numérique des équations*, Bull. Sci. Math., 2, 29-31 (1957).
- [126] Popoviciu, E., *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1972.
- [127] Popoviciu, T., *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. de la Soc. roum. des Sc., t. 42(1), 65-78, (1941).
- [128] Popoviciu, T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. vol. 13, 75-78, (1968).
- [129] Popoviciu, T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, (Thèse), Paris, 12 June 1933. Published in Mathematica vol. VIII, 1-85, 1934.
- [130] Potra, F. A. and Pták, V., *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman Publ., London, 1984.
- [131] Potra, F. A. *On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations*, Numer. Funct. Anal. Optim., 7, no. 1, 75-106, (1984-1985).
- [132] Potra, F. A., *Newton-like methods with monotone convergence for solving nonlinear operator equations*, Nonlinear Anal., Theory Methods and Applications, 11, no. 6, 697-717, (1987).

- [133] Potra, F.A., *On the convergence of a class of Newton-like methods, Iterative solution of nonlinear systems of equations*, Lecture Notes in Math., 953, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [134] Potra, Florian-A. and Pták, V., *Sharp error bounds for Newton's method*, Numer. Math., 34, no. 1, 63-72, (1980).
- [135] Pták, V., *The rate of convergence of Newton's process.*, Numer. Math., 25, no. 3, 279-285, (1976).
- [136] Rakne, J., *Newton's Method Under Mild Differentiability Conditions with Error Analysis*, Numer. Math. 18, 401-412, (1972).
- [137] Rall, B.L., *Convergence of the Newton Process of Multiple Solutions*, Numerische Mathematik, 9, 23-37, (1966).
- [138] Roșca, I., *Analiza numerică*, Editura Universității din București, 1999.
- [139] Sergeev, A.A., *O metode hord*, Sibirski Mat. Journal, XI, (2), 282-289, (1961)
- [140] Stancu, D.D., Coman, Gh., Agratini, O., Trîmbițaș, R., *Analiza numerică și teoria aproximării*, vol.I, Presa Universitară Clujeană, 2001.
- [141] Stancu, D.D., Coman, Gh., Agratini, O., Trîmbițaș, R., *Analiza numerică și teoria aproximării*, vol.II, Presa Universitară Clujeană, 2002.
- [142] Stancu, D.D., *On Hermite's osculatory interpolation formula and on some generalizations of it*, Mathematica 8(31) no.2, 373-391, (1966).
- [143] Stancu, D.D., *Sur la formule d'interpolation d'Hermite et quelques applications de celle-ci*, Studii Cerc. Matematice Acad. R.P.R., Fil. Cluj, 8, 339-354, (1958).
- [144] Tamme, A., *O priblijennom rešenii funkциональnykh uravnenii metodom razloženija redâ obratnogo operatora*, D.A.N. Tom 103, 5, 769-772 (1955).
- [145] Traub, F. J., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., (1964).
- [146] Turowicz, A. B., *Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse*, Ann. Polon. Math., 8, 265-269, (1960).
- [147] Ul'm, S., *Algoritm obobscennogo metoda Steffensen'a*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S.S.R., 3, 435-443 (1965).

- [148] Ul'm, S., *Ob iteraționnîh metodah s posledovatel'noi approcsimacii obratnovo operatora*, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S.S.R. 16, 4, 403-411 (1967).
- [149] Ul'm, S., *Ob obșcenie metoda Steffensenă dlea rešenia nelineinîh operatornîh uravnenii*, Jurnal vîcisl. Mat. i mat.-fiz., 4, 6, (1964).
- [150] Urabe, M., *Convergence of numerical iteration in solution of equations*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 19, 479-489, (1956).
- [151] Urabe, M., *Error Estimation in Numerical Solution of Equation Process*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 26, 77-91, (1962).
- [152] Weinischke, J.H., *Über die klasse von Iterationsverfahren*, Numerische Mathematik, 6, 395-404, (1964).